**TOPOLOGIE MÉTRIQUE — FEUILLE 1 — PRINTEMPS 2026**

**Exercice 1.** Soit $(X,d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $X$.

(1) Montrer que les applications
$$d' = \min(d,1) \qquad \text{et} \qquad d'' = \frac{d}{1+d}$$
sont des distances sur $X$.

(2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $A$ est ouverte dans $(X,d)$ ;
   (i) $A$ est ouverte dans $(X,d')$ ;
   (i) $A$ est ouverte dans $(X,d'')$.

**Exercice 2** (Inégalité du quadrilatère)**.** Soit $(X,d)$ un espace métrique, montrer que quelques soient $x,y,w,z \in X$, on a :
$$|d(x,y) - d(w,z)| \leq d(x,w) + d(y,z).$$

**Exercice 3.** Soit $X$ un ensemble fini pour $A,B \in \mathcal{P}(X)$, on définit :
$$d(A,B) = \#A + \#B - 2\#(A \cap B).$$

(1) Montrer que $d$ est une distance sur $\mathcal{P}(X)$.

(2) Quels sont les ouverts dans $(\mathcal{P}(X), d)$ ?

**Exercice 4.** On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle. Déterminer quels sont les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont des ouverts.

**Exercice 5.** Soit $X = \mathbb{R}_+^*$, pour $x,y \in X$, on définit $\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

(1) Montrer que $\delta$ est une distance sur $X$.

(2) Déterminer $B(1,1)$ dans $(X,\delta)$.

(3) Déterminer toutes les boules ouvertes de $(X,\delta)$.

**Exercice 6.** Soit $E$ l'espace vectoriel des suites bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

(1) La partie de $E$ formée des suites croissantes.

(2) La partie de $E$ formée des suites convergeant vers $0$.

**Exercice 7** (Distance SNCF)**.** On définit $d\colon (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ ainsi :
$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que $d$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Dessiner $B(x,r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

(3) Déterminer les suites convergeantes pour cette distance.

(4) Déterminer les fonctions continues de $(\mathbb{R}^2, d)$ dans $\mathbb{R}$.

(5) Expliquer le titre de cet exercice.

**Exercice 8.** Soit $(X,d)$ un espace métrique et $A$ une partie non vide de $X$. On note $\overline{A}$ son adhérence. Pour tout $x \in X$, on pose $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$.

(1) Montrer que $d(x, A) = 0$ équivaut à $x \in \overline{A}$.
(2) Comparer $d(x, A)$, $d(x, \overline{A})$ et $d(x, \mathring{A})$.
(3) Montrer que, pour tous $x, y \in X$, on a
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$
(4) Si $B$ est une autre partie non vide de $X$, on note $d(A, B) = \inf\{d(x, y); (x, y) \in A \times B\}$.
  (a) Montrer que $d(A, B) = d(\overline{A}, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.
  (b) On suppose que $d(A, B) = 0$.
    (i) Peut-on affirmer que $A \cap B \neq \emptyset$ ?
    (ii) Peut-on affirmer que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ ?
    (iii) Peut-on affirmer que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \neq \emptyset$ ?
  (c) On suppose que $d(A, B) \neq 0$. Montrer qu'il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $X$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
  (d) Trouver un exemple pour lequel il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $X$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ avec $U \cap V = \emptyset$ et pourtant $d(A, B) = 0$.

**Exercice 9.** Soit $(X, d)$ un espace métrique.

(1) Montrer que les opérations $A \mapsto \mathring{\overline{A}}$ et $A \mapsto \overline{\mathring{A}}$ sont involutives, c'est à dire que $\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ et $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.
(2) Trouver une partie $A$ d'un espace métrique telle que les ensembles $A, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}$ sont tous différents.

**Exercice 10** (Espaces ultramétriques)**.** Un espace métrique $(X, d)$ est dit *ultramétrique* si pour tout $x, y, z \in X$,
$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)).$$

(1) Établir[1] que dans $X$, tout triangle est (au moins) isocèle.
(2) Montrer que si $y \in B(x, r)$, alors $B(x, r) = B(y, r)$.
(3) Montrer que si on considère deux boules ouvertes, soit elles sont disjointes, soit l'une contient l'autre.
(4) Montrer que les boules ouvertes et fermées sont à la fois ouvertes et fermées.
(5) Montre que la distance discrète munit n'importe quel ensemble d'une structure ultramétrique.
(6) On considère $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles. Si $u$ et $v$ sont deux suites, on définit :
$$d(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = v, \\ 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} | u_n \neq v_n\}} & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que $(X, d)$ est un espace ultra-métrique.

**Exercice 11.** Soit $E$ un espace vectoriel normé, et $V$ un sous-espace vectoriel de $E$.

(1) Montrer que si $\mathring{V} \neq \emptyset$, alors $0 \in \mathring{V}$ puis que $\mathring{V}$ contient une boule ouverte de centre 0.
(2) En déduire que si $\mathring{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.
(3) Quels sont les sous espaces vectoriels ouverts dans $E$ ?
(4) Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
(5) Application : soit $H$ un hyperplan de $E$. Démontrer que $H$ est ou bien fermé ou bien dense dans $E$.

1. Probablement la première vraie tâche est de décrypter cette phrase