Exercice 1. Du système on déduit :

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}x_1$$

et donc $x_1 = A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\phi)$. Ainsi la période est $2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$, la demi-période est $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. On a donc une

$$l = \frac{g}{\pi^2} \times (1\mathrm{s})^2 \simeq 99\mathrm{cm}$$

Exercice 2. Aucune des fonctions listée n'est contractante. En effet, cela vient du lemme suivant :

Lemme 1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (dérivable suffit) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est contractante si et seulement si il existe λ dans $]0,1[$ tel que $|f'(t)| < \lambda$.

Démonstration. Il est clair que si f est contractante la valeur absolue de sa dérivée est plus petite qu'un λ avec λ dans $]0,1[$. La réciproque vient du théorème des accroissements finis. □

(1) La fonction sin n'est pas contractante, en effet $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.
(2) La fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t^2}$, n'est pas contractante, en effet sa dérivée est la fonction $t \to \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et cette fonction tend vers 1 en $\pm\infty$.
(3) La fonction arctan n'est pas contractante car sa dérivée ($t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$) vaut 1 en 0.

Exercice 3. Oui on peut, si on demande à x et y d'être distinct. Il suffit de considérer $\widetilde{\lambda} := \frac{1+\lambda}{2}$ qui est à la fois strictement plus petit que 1 et stricement plus grand que λ.

Exercice 4. **(1)** Non : Soit $M > 0$, en posant $x = M+1$, on a : $|x^2-0| > M|x-0|$.
(2) Non. Soit $M > 0$, en posant $x = \frac{1}{(M+1)^2}$, on a : $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| > M|x-0|$.
(3) Oui : c'est presque la définition.
(4) Oui :
(5) Non : Soit $M > 1$ en posant $x = \exp -M - 1$, on a $|x\log x - 0| > M|x|$.
(6) Oui : $|z_1^2 - z_2^2| = |z_1 - z_2| \cdot |z_1 + z_2| \leq 2|z_1 - z_2|$.

Exercice 5. Contractante $\Rightarrow$ Lipschitz : Contractante veut simplement dire Lipschitz avec une constante de Lipschitz stricement inférieure à 1. Lipschitz $\Rightarrow$ continue : Si on appelle λ la constante de Lipschitz, on peut prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ dans la définition de la continuité.