Exercice 1. On va démontrer un résultat plus générale puis on se servira du théorème de la boule chevelue :

Si M et N sont deux variétés de dimension k et $\varphi : M \to N$ est une submersion surjective alors tout champ de vecteurs Y sur N se relève canoniquement en un champs de vecteur X de M. De plus, si Y ne s'annule pas alors X ne s'annule pas.

Comme M et N sont des variétés de même dimension, le caractère submersif de φ signifie que φ est un diffeomorphisme locale. Ainsi, pour tout point x de M, il existe un ouvert U de M contenant x et un ouvert V de N tel que φ induise un difféomorphisme entre U et V. Cette même application induit alors un isomorphisme de fibré vectoriel entre TU et TV, noté $T\varphi$. Plus concrètement, si on note y l'image de x par φ :

— si v est un élément de $T_xU = T_xM$ représenté par une c courbe de $[-1,1]$ dans U (avec $c(0) = x$), $T\varphi(v)$ ($\in T_yV = T_yN$) est représenté par la courbe $\varphi \circ c : [-1,1] \to V$.

— si v est représenté par une dériviation $D : \mathcal{F}_x(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T\varphi(v)$ est représenté par la dérivation

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{D}: & \mathcal{F}_y(V, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & D(f \circ \phi^{-1}). \end{array}$$

Ainsi, si Y est un champs de vecteur sur N, on peut définir un champs de veteur X sur M de la manière suivante : pour tout x dans M, $X(x) = (T\varphi)^{-1}(Y(\varphi))$. Le fait que $T\varphi$ soit un difféomorphisme locale implique que X est continue et l'unicité dans le théorème d'inversion locale implique que X est défini sans ambiguïté. De plus, comme $T\varphi$ est un difféomorphisme de fibré, le champs X en x s'annule si et seulement si Y s'annule en $\varphi(x)$. L'application φ étant supposé surjective, si Y ne s'annule pas, X ne s'annule pas.

On répond maintenant à la question. On rappelle que $\mathbb{R}P^2$ est le quotient de $\mathbb{S}^2$ par $\{(x, y, z) \sim (-x, -y, -z))\}$. L'application de projection π fournit une submserion surjective (on peut le voir sur des carte locale si nécessaire). On raisonne par l'absurde et on se donne Y un champ de vecteur sur $\mathbb{R}P^2$ qui ne s'annule pas. On peut alors appliqué le résultat précédent et trouvé un champs de vecteur de $\mathbb{S}^2$ qui ne s'annule pas, ceci contredit le théorème de la boule chevelue.

Exercice 2. On se convainc facilement que le champs définit par :

$$X_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} z + x^2 - 1 \\ xy \\ x(z-1) \end{pmatrix}$$

convient. En effet, on a

$$X_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = (z-1) \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc X définit bien un champ de vecteur sur $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$. De plus X s'annule uniquement en $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. On a trouvé ce champs de vecteur a l'aide de la projection stéréographique :

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{S}^2 \setminus \{0,0,1\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \end{array}$$

On trouve facilement un champs de vecteur ne s'annulant nulle part sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple le champs constant égale à $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$