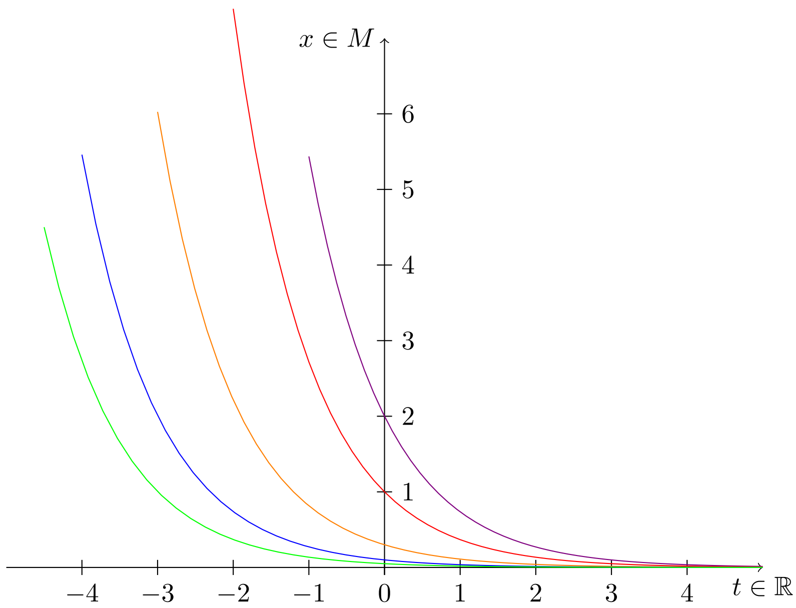
**Exercice 1.** On considère $\{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes d'une variété $M$. Par définition, on a :

$$v(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g^t(x)\right)_{t=0}.$$

Ainsi, si on note $h_x(t) = g^t(x)$, et $s_\tau(t) = \tau + t$, on a :

$$\begin{aligned} v(g^\tau(x)) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g^t(g^\tau(x))\right)\right)_{t=0} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g^{t+\tau}(x)\right)\right)_{t=0} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h_x(s_\tau(t))\right)\right)_{t=0} \\ &= s'(t)\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h_x(t)\right)\right)(s_\tau(t))\right)_{t=0} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h_x(t)\right)\right)_{t=\tau}. \end{aligned}$$

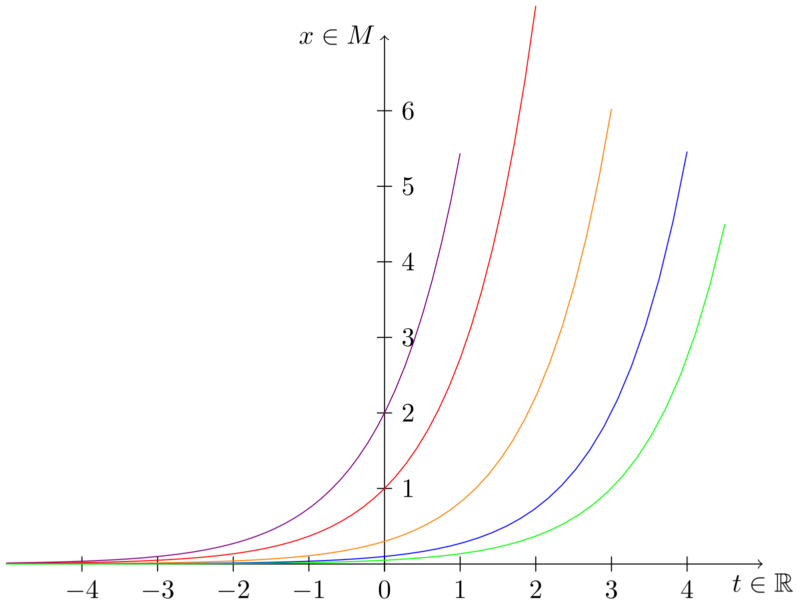
**Exercice 2.** **(1)** Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $\phi(t) = x_0\exp(-kt)$.



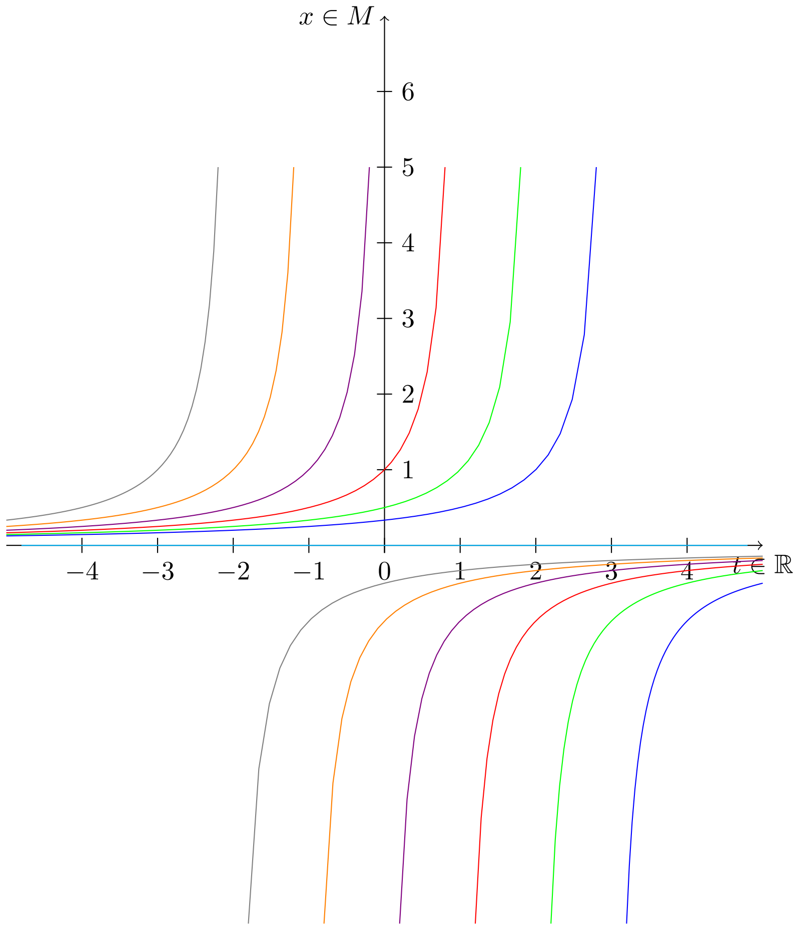

**(2)** Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $\phi(t) = x_0\exp(kt)$.
**(1)** Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $\phi(t) = \frac{1}{-kt+\frac{1}{x_0}}$.

**Exercice 3.** **(1)** Les solutions du systèmes sont les fonction $\varphi(t) = \begin{pmatrix} -g\frac{t^2}{2} + v_0t + x_0 \\ -gt + v_0 \end{pmatrix}$, pour $x_0$ et $v_0$ des constantes données.

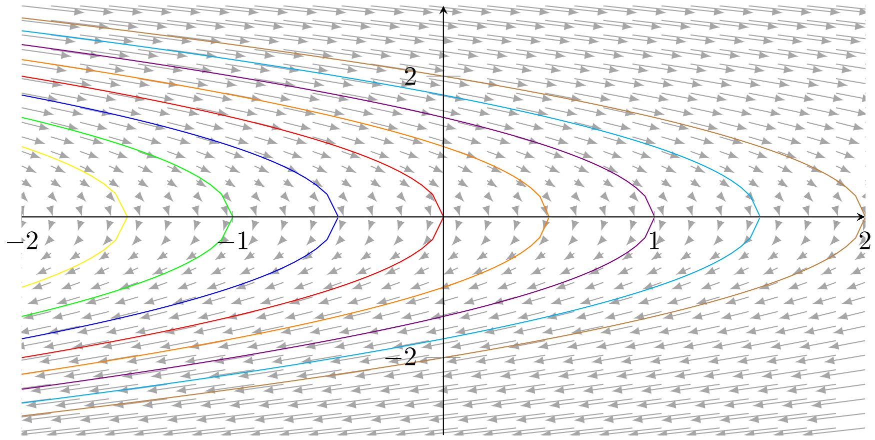
**(1)** Les solutions du systèmes sont les fonction $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x_0\sin(\sqrt{k}t + \theta_0) \\ x_0\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t + \theta_0) \end{pmatrix}$, pour $x_0$ et $v_0$ des constantes données.



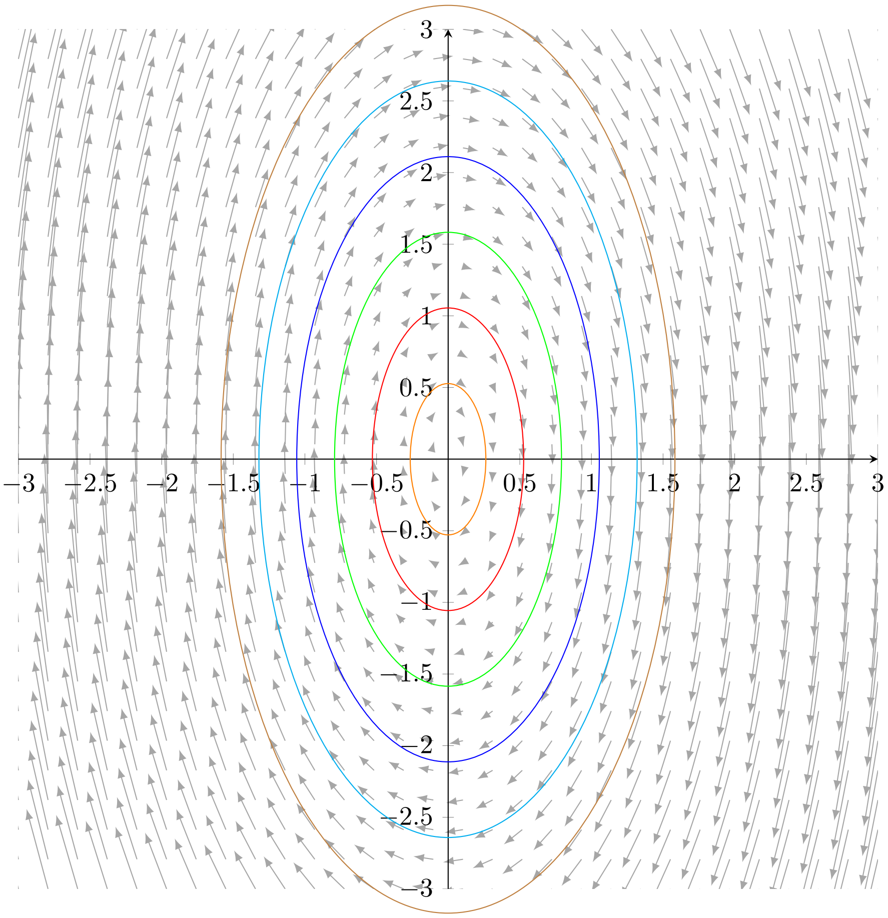
$x \in M$
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
$t \in \mathbb{R}$

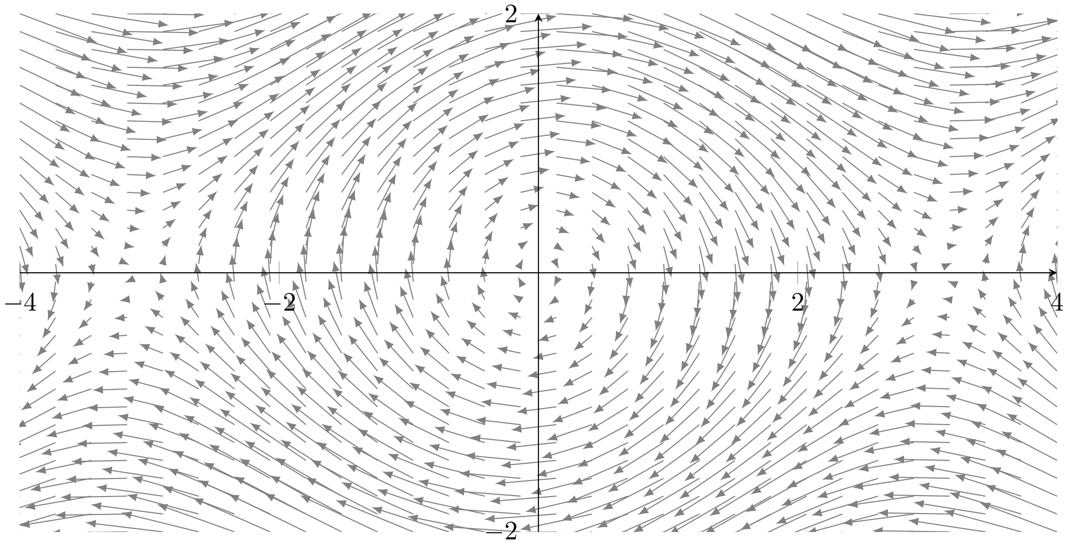
$x \in M$
6
5
4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
$t \in \mathbb{R}$



2
−2
−1
1
2
−2

3
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−3
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3


2
−4
−2
2
4
−2