Exercice 1. On remarque tout d'abord que l'expontentiel de matrice est bien définit, car on peut munir $M_n(\mathbb{R})$ (par exemple $A \mapsto \mathrm{tr} A^t A$) d'une norme d'algèbre. Il devient alors évident que la série définissant l'exponentiel est absolument convergente. L'espace $M_n(\mathbb{R})$ muni de cette norme étant complet, la série définit bien une unique matrice.
(1) Si A et B sont deux matrices qui commutent, on a :

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i\ j} A^i B^j.$$

On peut donc calculer :

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} \\
&= e^A e^B.
\end{aligned}$$

(2) Si T est une matrice inversible alors $\left(TAT^{-1}\right)^n = TA^nT^{-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
e^{TAT^{-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{TA^nT^{-1}}{n!} \\
&= T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right) T^{-1} \qquad\qquad = Te^AT^{-1}.
\end{aligned}$$

(3) On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_A\colon & \mathbb{R} & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & e^{tA}. \end{array}$$

On a évidement $f(0) = I_n$ On calcule :

$$\begin{aligned}
f_A(0+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} h^n \frac{A^n}{n!} \\
&= I_n + Ah + h^2 \sum n = 2^{\infty} h^{n-2} \frac{A^n}{n!} \\
&= f_1(0) + Ah + o(h).
\end{aligned}$$

ce qui montre par définition de la différentiabilité que f_A est différentiable en 0 et que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} f_A = A$.

Exercice 2. On va essayer de voir l'application $t \mapsto g^t$ comme une courbe intégrale dans $M_n(\mathbb{R})$. On a :

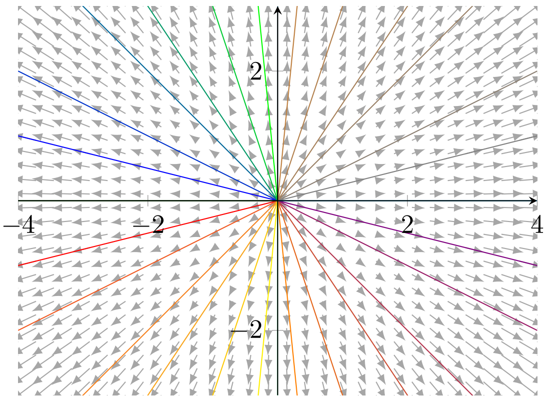
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau} g^t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g^\tau g^t = Ag^\tau.$$

Comme $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, on peut identifier $T_M M_n(\mathbb{R})$ avec $M_n(\mathbb{R})$ en tout point. La courbe $t \mapsto g^t$ est donc solution du problème de Cauchy dans $M_n(\mathbb{R})$:

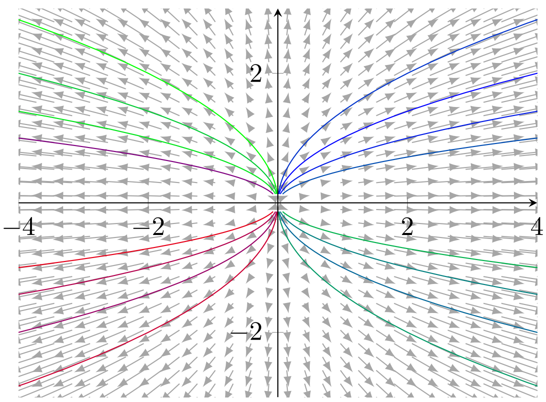
$$\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X = \dot{X} = AX (\in T_{X(t)} M_n(\mathbb{R})) X(0) = I_n \right.$$

D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz on a unicité locale d'une telle solution. Or $t \mapsto e^{tA}$ fournit une solution globale, donc cette solution est l'unique solution.

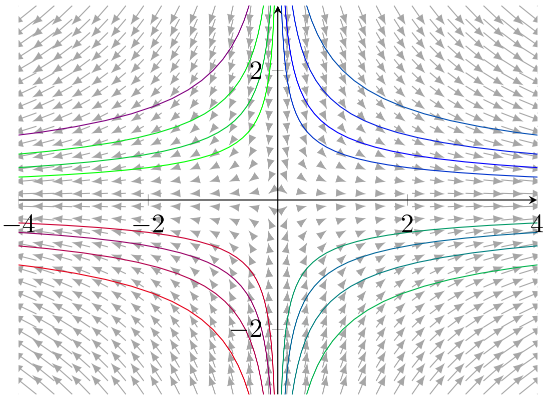
Exercice 3. (a)



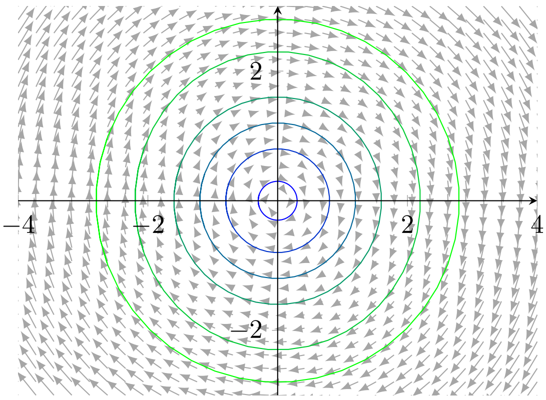
(b)



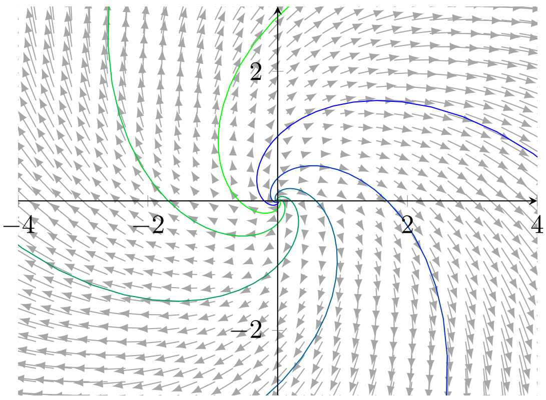
(c)



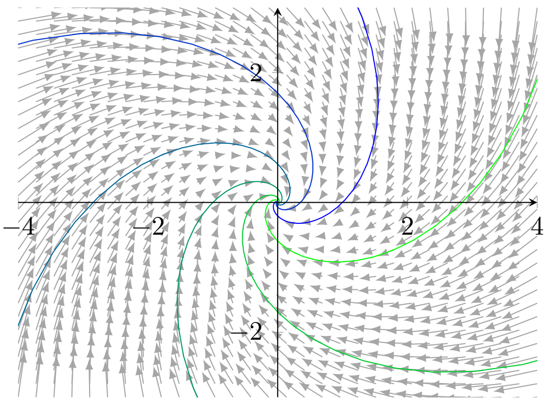
(d)



(e)



(f)



(g)