On appelle *Lemme pré-fondamental*, le lemme du cours qui précède le lemme fondamental. C'est à dire :

Lemme 1. *Soient $I := [x_0, x_0 + a[$ un intervalle et $u, w : I \to \mathbb{R}, g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues satisfaisant les conditions :*

$$\begin{aligned} D_+w(x) &\leq g(x, w(x)), && \forall x \in I, \\ D_+u(x) &> g(x, u(x)), && \forall x \in I, \end{aligned}$$

et

$$w(x_0) \leq u(x_0).$$

Alors pour tout $x \in I$,

$$w(x) \leq u(x).$$

(1)

La fonction ϕ est strictement croissante car sa dérivée est strictement positive. En effet le seul point où elle pourrait s'annuler est en 0, mais elle vaut a^2.

On cherche à appliquer le lemme pré-fondamental. Soit x_0 un élement de $]0, \omega_+[$. On suit l'indication et on considère $(]b_{\min}, b_{\max}[, \psi)$ une solution maximale du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(x_0) = a. \end{cases}$$

On considère :

— $I = [x_0, \omega_+[\cap [x_0, b_{\max}[$
— $g(x, y) = y^2$,
— $w = \psi$,
— $u = \phi$.

$$\begin{aligned} D_+\psi(x) = \psi'(x) = \psi(x)^2 &\leq g(x, \psi(x)), && \forall x \in I, \\ D_+\phi(x) = \phi'(x) = \phi(x)^2 + x^2 &> g(x, u(x)), && \forall x \in I \text{ et} \\ \psi(x_0) = a = \phi(0) &< \phi(x_0) \end{aligned}$$

Donc $\phi(x) \geq \psi(x)$ pour tout x de I. Par ailleurs, on a

$$\psi(x) = -\frac{1}{x - x_0 - \frac{1}{a}}$$

et $b_{\max} = x_0 + \frac{1}{a}$. Montrons par l'absurde que $w_+ \leq b_{\max}$: on suppose que $\phi(b_{\max})$ est définit. On a

$$\phi(b_{\max}) \geq \phi(x) \geq \psi(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de }]x_0, b_{\max}[,$$

comme $\psi(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $b_{\max}$, $\phi(b_{\max})$ est plus grand que n'importe quel réel. Ce qui est absurde.

(2)

On remarque que ϕ_0 la fonction constante égale à $-\frac{\delta}{L}$ est solution de l'équation différentielle. Une solution générale de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$x \mapsto \phi_0(x) + \lambda \exp(Lx).$$

Il suffit donc de trouver le λ adéquate. On a

$$-\frac{\delta}{L} + \lambda \exp(Lx_0) = y_0,$$

ce qui donne :

$$\lambda = \frac{y_0 + \frac{\delta}{L}}{\exp(Lx_0)}.$$

Donc la solution du problème de Cauchy est :

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -\frac{\delta}{L} + \left(y_0 + \frac{\delta}{L}\right) \exp(L(x - x_0)). \end{array}$$

(3.a)

La fonction y_h est affine par morceau, elle admet donc une dérivée à droite en tout point. Ainsi pour tout $x \in [x_n, x_{n+1}[$, on a :

$$D_+ y_h(x) = f(x_n, y_n).$$

De plus on a : $x_n = nh$ et $y_n = (1 + h\lambda)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Pour tout n et tout x de $[x_n, x_{n+1}[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda y_h(x)}{1 + h\lambda} &= \frac{\lambda(y_n + (x - x_n)\lambda y_n)}{1 + h\lambda} \\ &= \lambda y_n \left(\frac{1 + (x - x_n)\lambda}{1 + h\lambda}\right) \\ &< \lambda y_n = D_+(y_h)(x), \end{aligned}$$

car $(x - x_n) < h$; et

$$\begin{aligned} \lambda y_h(x) &= \lambda \left(y_n + (x - x_n)\lambda y_n\right) \\ &\geq \lambda y_n = D_+(y_h)(x). \end{aligned}$$

(3.b)

On va se servir du lemme pré-fondamental, on pose :

— $I = \mathbb{R}_+$

— $g(x, y) = \frac{\lambda}{1+h\lambda} y$,

— $w(x) = \exp\left(\frac{\lambda}{1+h\lambda} x\right)$,

— $u(x) = y_h(x)$.

On a pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$D_+(w)(x) = \frac{\lambda}{1 + h\lambda} \exp\left(\frac{\lambda}{1 + h\lambda} x\right) = g(x, w(x))$$

et

$$D_+(y_h)(x) > g(x, y_h(x)).$$

De plus $u(0) = w(0) = 1$. Donc d'après le lemme pré-fondamental $w(x) \leq u(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$. En particulier, pour $h = \frac{1}{n}$ et $x = 1$ on a :

$$\exp\left(\frac{\lambda}{1+\frac{\lambda}{n}}\right) \leq y_h(1) = y_h(x_n) = y_n = \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

et donc (en prenant la puissance $1+\frac{\lambda}{n}$) :

$$\exp(\lambda) \leq \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n+\lambda}.$$

L'autre sens est un peu pus compliqué. Pour $\epsilon > 0$, on pose :
— $I = \mathbb{R}_+$
— $g(x,y) = \lambda y$,
— $w(x) = y_h(x)$,
— $u(x) = \exp((\lambda+\epsilon)x)$.

On a pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$D_+(y_h)(x) \leq g(x, y_h(y)) = \lambda y_h(x)$$

et

$$D_+(u)(x) = (\lambda+\epsilon)u(x) > \lambda u(x) = g(x, u(x)).$$

De plus $u(0) = w(0) = 1$. Donc pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a

$$y_h(x) \leq \exp((\lambda+\epsilon)x)$$

En particulier, pour $h = \frac{1}{n}$ et $x = 1$, on a :

$$y_h(1) = y_h(x_n) = y_n = \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \leq \exp(\lambda+\epsilon).$$

Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient par continuité de l'exponentiel :

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \leq \exp(\lambda).$$