(1)

On suit l'indication : on écrit $y_1(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ et $y_2 = r(t)\sin(\theta(t))$ (avec $r \geq 0$). On cherche d'abord une équation différentielle pour $r^2 = y_1^2 + y_2^2$. On a :

$$\left(r^2\right)' = 2\left(y_1y_1' + y_2y_2'\right) = 2y_1^2 + y_2^2 = r^2.$$

donc $r^2(t) = r_0^2\exp(2(t-t_0))$ et donc $r(t) = r_0\exp(t-t_0)$. On note que si $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ la fonction nulle est la solution du problème de Cauchy. Ainsi, on peut supposer que $r(t)$ ne s'annule jamais. On peut maintenant réécrire le système :

$$\begin{cases}(r(t)\cos(\theta(t)))' = r(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\\ (r(t)\sin(\theta(t)))' = r(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\sin(\theta(t))\end{cases}$$

$$\begin{cases}r(t)\left(\cos(\theta(t)) - \theta'(t)\sin(\theta(t))\right) = r(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\\ r(t)\left(\sin(\theta(t)) + \theta'(t)\cos(\theta(t))\right) = r(t)\cos(\theta(t)) + r(t)\sin(\theta(t))\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos^2(\theta(t)) - \theta'(t)\cos(\theta(t))\sin(\theta(t)) = \cos^2(\theta(t)) - \cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\\ \sin^2(\theta(t)) + \theta'(t)\sin(\theta(t))\cos(\theta(t)) = \sin(\theta(t))\cos(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))\end{cases}$$

On en déduit que $\theta'(t) = 1$, et donc que $\theta(t) = t - t_0 + \theta_0$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix}r_0\exp(t-t_0)\cos(t-t_0+\theta_0)\\ r_0\exp(t-t_0)\sin(t-t_0+\theta_0)\end{pmatrix}.$$

(2)

On suit l'indication : on écrit $z = y_1 + iy_2$. On a donc :

$$z' = y_1' + iy_2' = y_1\cos(x) - y_2\sin(x) + y_1 i\sin(x) + y_2 i\cos(x) = \exp(ix)z.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}z(t) =& z_0\exp(-i\exp(ix) + i(\exp(ix_0)),\\ y_1(t) =& \Re\left(z_0\exp(-i\exp(ix) + i(\exp(ix_0))\right)\\ =& y_1(x_0)\exp(\sin(x) - \sin(x_0))\cos(-\cos(x) + \cos(x_0))\\ & - y_2(x_0)\exp(\sin(x) - \sin(x_0))\sin(-\cos(x) + \cos(x_0))\\ y_2(t) =& \Im\left(z_0\exp(-i\exp(ix) + i(\exp(ix_0))\right)\\ =& y_2(x_0)\exp(\sin(x) - \sin(x_0))\cos(-\cos(x) + \cos(x_0))\\ & + y_1(x_0)\exp(\sin(x) - \sin(x_0))\sin(-\cos(x) - \cos(x_0))\end{aligned}$$

On trouve la resolvante en écrivant le solutions des problème de Cauchy

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$R(x, x_0) = \begin{pmatrix}\exp(\sin(x) - \sin(x_0))\cos(-\cos(x) + \cos(x_0)) & -\exp(\sin(x) - \sin(x_0))\sin(-\cos(x) + \cos(x_0))\\ \exp(\sin(x) - \sin(x_0))\sin(-\cos(x) + \cos(x_0)) & \exp(\sin(x) - \sin(x_0))\cos(-\cos(x) + \cos(x_0))\end{pmatrix}.$$

(3)

On suppose que l'on dispose d'une solution φ à l'EDOL $y' = A(x)y$ dont la première coordonnée ne s'annule pas sur un intervalle I. La matrice A est supposée de taille $n \times n$. On cherche les autres solutions sous la forme $u\varphi + z$ où u est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ et $z = (0, z_2, \ldots, z_n)$ est une fonction à dans $\mathbb{R}^n$ dont la première coordonnée est identiquement nulle. On cherche une équation satisfaite par z. On a :

$$(u\varphi + z)'(x) = u'(x)\varphi(x) + u(x)\varphi'(x) + z'(x) = u(x)A(x)(\varphi(x)) + A(x)z(x)$$
$$u'(x)\varphi(x) + z'(x) = A(x)z(x)$$

La première ligne de cette équation nous donne :

$$u'(x)\varphi_1(x) = \sum_{i=2}^{n} a_{1i} z_i(x).$$

On obtient donc :

$$z'(x) = A(x)z(x) - \frac{1}{\varphi_1(x)} \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j(x) \right) \varphi(x).$$

La première ligne de cette équation est identiquement nulle. On appelle $B(x)$ la sous-matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ situé en bas à droite de $A(x)$ et on note :

$$C(x) := \frac{1}{\varphi_1(x)} \left(\varphi_{i+1} a_{1(j+1)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}},$$

et enfin $D(x) = B(x) - C(x)$. On a alors $z'(x) = D(x)z(x)$. Dans cette dernière expression, on a enlevé les 0s en haut des vecteur z et z'. On s'est donc ramené à un problème d'ordre inférieur.

(4)

On vérifie facilement que la fonction proposé est effectivement solution de l'EDOL. On cherche une deuxième solution à l'EDOL en se servant de la question précédente. Avec les notations précédente, on trouve :

$$u'(x)x^2 = -x \quad \text{et} \quad z'(x) = -\frac{1}{x} z.$$

Ainsi, la question précédente nous fournis par exemple la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} \log(x)x^2 \\ -x\log(x) - x \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie aisément que ψ est bien solution.

Pour avoir la résolvante $R(x, 1)$, il suffit de trouver les solution au problème de Cauchy

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} (x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La résolvante $R(x,1)$ est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \varphi(x)_1 - \psi_1(x) & -\psi_1(x) \\ \varphi(x)_2 - \psi_2(x) & -\psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(1-\log(x)) & -x^2\log(x) \\ -x\log(x) & x(\log x + 1) \end{pmatrix}.$$