(1.a)

Être continue pour un opérateur est la même chose qu'être borné.

Soit f un élément de E. Pour tout t de $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |Af(t)| &= \left|2t^3 f(1/2) - 2tf(0)\right| \\ &\leq 2\,|f(1/2)| + 2\,|f(0)| \\ &\leq 4\,\|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Donc $\|Af\|_\infty \leq 4\,\|f\|_\infty$, donc $\|A\| < \infty$ et donc A est borné et donc continue.

(1.b)

On a montré que $\|A\| \leq 4$, montrons qu'il s'agit en fait d'une égalité. Il suffit pour cela de trouver une fonction f pour laquelle la norme est atteinte. On cherche donc à avoir des égalités partout où on a eu des inégalité. Ainsi on peut par exemple prendre une fonction pour laquelle $f(1/2) = -f(0) = \|f\|_\infty$. On choisit donc par exemple :

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -1+4x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 & \text{si } x \leq 1/2. \end{cases} \end{array}$$

Pour cette fonction on a $\|f\|_\infty = 1$ et $Af(t) = 2t^3 + 2t$, donc $\infty Af = 4$ et donc $\|A\| \geq 4$.

Pour A^2, on procède de la même manière, mais il faut tout d'abord calculer $A^2 f$ pour une fonction f générale :

$$\begin{aligned} (A^2 f)(t) &= 2t^3 (Af)(1/2) - 2t(Af(0)) \\ &= 2t^3 (1/4 f(1/2) - f(0)) - 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout t,

$$\begin{aligned} \left|(A^2 f)(t)\right| &= \left|2t^3(1/4 f(1/2) - f(0))\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\,|f(1/2)| + 2\,|f(0)| \\ &\leq \frac{5}{2}\,\|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\|A\| \leq \frac{5}{2}$.

On cherche une fonction f pour laquelle les inégalités sont des égalités. La même fonction que précédment fonctionne : on a $A^2 f(t) = \frac{5}{2} t^3$ ainsi $\left\|A^2 f\right\|_\infty = \frac{5}{2}$. Donc $\left\|A^2\right\| = \frac{5}{2}$.

(2)

Soit f un élément de E. On a pour tout t de $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
|Vf(t)| &= \left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \int_0^t |f(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leq a\int_0^t \|f\|_\infty\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|f\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\|V\| \leq 1$. La fonction constante permet de montrer que $\|V\| = 1$. Pour v^2, ca marche essentiellement pareil :

$$\begin{aligned}
\left|V^2 f(t)\right| &= \left|\int_0^t Vf(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \left|\int_0^t \int_0^s |f(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \left|\int_0^t s\,\|f\|_\infty\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\,\|f\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\left\|V^2\right\| \leq \frac{1}{2}$. De plus, avec la même fonction que précédement, on obtient $\left\|V^2 f\right\|_\infty = \frac{1}{2}\,\|f\|_\infty$, donc $\left\|V^2\right\| = \frac{1}{2}$.