(1)

On calcule tout d'abbord la dérivée de f : On a :

$$f(X+H) = X^2 + HX^3 + XHX^2 + X^2HX + X^3H + o(\|H\|).$$

On a donc pour tout X de $\mathcal{L}(E)$:

$$\begin{array}{rccl} f'(X) \colon & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & H & \mapsto & HX^3 + XHX^2 + X^2HX + X^3H. \end{array}$$

On se sert de la remarque du cours : pour un H fixé on note $f'_H : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ l'application définie par :

$$f'_H(X) = f'(X)(H).$$

On calcule maintenant la dérivée de f'_H. On a :

$$\begin{aligned} f'_H(X+K) =& H(X+K)^3 + (X+K)H(X+K)^2 + (X+K)^2H(X+K) + (X+K)^3H \\ =& HX^3 + HKX^2 + HXKX + HX^2K + o(\|K\|) \\ &+ XHX^2 + KHX^2 + XHKX + XHXK + o(\|K\|) \\ &+ X^2HX + KXHX + XKHX + X^2HK + o(\|K\|) \\ &+ X^3H + KX^2H + XKXH + X^2KH + o(\|K\|) \\ =& f'_H(X) + (HKX^2 + HXKX + HX^2K) + (KHX^2 + XHKX + XHXK) \\ &+ (KXHX + XKHX + X^2HK) + (KX^2H + XKXH + X^2KH) + o(\|K\|) \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{array}{rccl} f'(X) \colon & \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & (H,K) & \mapsto & \begin{array}{l} (HKX^2 + HXKX + HX^2K) + (KHX^2 + XHKX + XHXK) \\ +(KXHX + XKHX + X^2HK) + (KX^2H + XKXH + X^2KH) \end{array} \end{array}$$

On note que $f'(K,H)$ est bien symétrique en H et K.

(2)

On suppose que f' est constante. En tout point x de U, c'est une application linéaire de E dans F que l'on note A. On considère une l'application g définie sur $U \subseteq E$ par $g(x) = f(x) - Ax$. D'après les règles de calculs des applications dérivées, on a $g'(x) = A - A = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$. Comme U est connexe (car convexe), le corollaire du théorème des accroissements finis nous donne que g est constante. L'application f est donc la somme d'une application constante et d'une application linéaire (ou plus précisément de la restriction d'une application linéaire à U).

(3)

On suit l'indication et on se sert de la fonction de Lagrange associé à ce problème d'optimisation sous contraintes.

$$\begin{array}{rccl} L \colon & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ & (x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) & \mapsto & \|x\|_2^2 - \sum_{i=1}^m \lambda_i (A_i(x) + b_i), \end{array}$$

où A_i est la $i$ème ligne de A. Le théorème de la méthode des multiplicateur de Lagrange nous donne que toute solution à ce problème d'optimisation est un point critique de L. On calcule donc la dérivée de L :

$$\begin{array}{rccl} L'(x, \lambda_1, \ldots \lambda_m) \colon & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (y, \mu_1, \ldots, \mu_m) & \mapsto & 2\langle x, y \rangle - \sum_{i=1}^m \mu_i (A_i(x) + b_i) - \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i(y). \end{array}$$

L'équation $L'(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0$ nous donne :

$$\begin{cases} A(x) = b \\ 2x^T = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} A(x) = b \\ x = \frac{1}{2} A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m. \end{pmatrix} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} AA^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m. \end{pmatrix} \quad x = \frac{1}{2} A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m. \end{pmatrix} \end{cases}$$

On va prouver plus tard que $M := AA^T$ est inversible. On a donc un unique point critique $(x_0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ pour L définit par :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1^0 \\ \vdots \\ \lambda_m^0. \end{pmatrix} = 2M^{-1}b \\ x = A^T M^{-1} b. \end{cases}$$

C'est clairement un minium car, on peut trouver des x tel que $Ax = b$ arbitrairement grand si $m < n$.

Pour voir que M est inversible, choisissons $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $My = 0$. On a alors $\langle A^T y, A^T y \rangle = y^T M y = 0$. Ce qui montre que $A^T y = 0$, comme A est de rang maximal, ceci montre que $y = 0$.

L'optimum x_0 est en fait le projeté orthogonal de 0 sur l'espace affine E_b définie par $Ax = b$: on a clairement $x_0 \in E_b$. D'autre part, si y est un vecteur de l'espace vectoriel direction de E_b (défini par $Ax = 0$), on a :

$$\langle y, x \rangle = \langle Ay M^{-1} b \rangle = 0$$

donc x_0 est orthogonal à E_b.

(4)

On remarque tout d'abord que la courbe n'est pas compacte. En effet on peut réécrire l'équation :

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 7y)(x + y) - 225 = 0$$

On constate (quitte à changer de base) que cette équation à des solutions pour des points (x, y) arbitrairement loin de l'origine.

On considère la fonction de Lagrange :

$$\begin{array}{rccl} L\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, \lambda) & \mapsto & x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225) \end{array}$$

On a $L(x, y, \lambda) = x^2(1 - \lambda) + y^2(1 - 7\lambda) - 8\lambda xy + 225\lambda$.

On va calculer sa dérivée et chercher ses points critiques.

$$\begin{array}{rrcl} L'(x,y,\lambda): & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (z,t,\mu) & \mapsto & 2zx(1-\lambda) - x^2\mu + 2ty(1-7\lambda) - 7y^2\mu - 8\mu xy - 8\lambda zy - 8\lambda xt + 225\mu \end{array}$$

donc si on réécrit un petit peu, on obtient

$$L(x,y,\lambda) = (2(x-\lambda) - 8\lambda y \quad 2(y-7\lambda) - 8\lambda x \quad -x^2 - 7y^2 - 8xy - +225)$$

$L(x,y,\lambda) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x - x\lambda - 4y\lambda = 0 \\ y - 7y\lambda - 4x\lambda = 0 \\ -x^2 - 7y^2 - 8xy + 225 = 0 \end{cases}$$

En ajoutant 2 fois la première ligne à -1 fois la deuxième on obtient :

$$2x - 2x\lambda - 8y\lambda - y + 7y\lambda + 4x\lambda = 0$$

et donc

$$(2x - y)(\lambda + 1) = 0.$$

Ainsi soit $\lambda = -1$, soit $y = 2x$. Si $y = 2x$ dans tous les cas, on résout la dernière équation avec cette nouvelle information. On obtient $x = \pm\sqrt{5}$ (et $\lambda = \frac{1}{9}$).

Si $\lambda = -1$, on trouver $x = -2y$, la dernière équation n'a pas de solution.

On en déduit que les solution au problème d'optimisation sont :

$$\begin{matrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} -\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{matrix}$$