Série 1 – Correction

Exercice 1.

(1) Donner un exemple d'une courbe élémentaire $C \subset \mathbb{R}^2$ qui n'admette pas une paramétrisation explicite. Expliquer.

Correction (0 point(s)): *La courbe*

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & ((t+1)\cos(t),(t+1)\sin(t)). \end{array}$$

n'a pas de paramétrisation explicite. C'est bien une courbe car γ est injective et continue. Montrons maintenant qu'elle n'a pas de paramétrisation explicite, c'est à dire que cette courbe ne peut s'écrire ni comme le graphe d'une fonction de x, ni comme le graphe d'une fonction de y. En effet les points $(0,\frac{\pi}{2}+1)$ et $(0,-\frac{3\pi}{2}-1)$ sont sur la courbe et ont même abscisse donc la courbe ne peut être le graphe d'une fonction de x. De la même manière, les points $(1,0)$ et $(-\pi-1,0)$ sont sur la courbe et ont la même ordonnée, donc la courbe ne peut être le graphe d'une fonction de y.

(2) Traduire mathématiquement la phrase suivante : *une courbe C lisse dans $\mathbb{R}^n$ a une paramétrisation locale autour de tout ses points.*

Correction (0 point(s)): *Soit C une courbe lisse. La phrase se traduit de la manière suivante :*

Pour tout pour $x \in C$, il existe un arc A de C contenant x (dans son intérieur si x n'est pas une extrémité de C) qui admet une paramétrisation qui admet une paramétrisation explicite via la ième coordonnée. C'est-à-dire qu'il existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}^{n-1}$ telle que

$$A \cap B_\varepsilon(x) = \{(f_1(t),\dots,f_{i-1}(t),t,f_i(t),\dots f_{n-1}(t))|t \in [a,b]\}.$$

(3) Démontrer la phrase précédente.

Correction (0 point(s)): *Soit C une courbe lisse avec une paramétrisation régulière $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $x_0 = \gamma(t_0)$. On sait que $\gamma'(t_0) \neq 0$, on peut donc choisir un i tel que $\gamma_i'(t_0) \neq 0$. Disons $\gamma_i'(t_0) > 0$ pour fixé les choses.*

Comme γ est lisse, on peut choisir un ε tel que si $t \in [0,1] \cap [t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon], \gamma_i'(t) > 0$. On note $[a,b]$ l'intervalle $[0,1]\cap[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$, on constate que si x n'est pas une extrémité de C alors x est dans l'intérieur de $[a,b]$. La restriction de γ_i à $[a,b]$ (toujours noté γ_i) est strictement croissante et est donc bijective sur son image noté $[c,d]$ (on sait que c'est un intervalle grâce au théorème des valeurs intermédiaires). On a

$$\begin{aligned} \gamma([a,b]) &= \{(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))|t \in [a,b]\}) \\ &= \{(\gamma_1 \circ \gamma_i^{-1}(s),\dots,\gamma_n \circ \gamma_i^{-1}(s))|s \in [c,d]\}) \end{aligned}$$

Ainsi l'arc $\gamma([a,b])$ a une paramétrisation explicite via la ième coordonnée. Dans le cas où $\gamma_i(t_0) < 0$, on répète l'argument, mais γ_i est alors strictement décroissante sur $[a,b]$.

Exercice 2. Soient $F : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière d'une courbe élémentaire $C \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Démontrer que $G : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ est une autre paramétrisation régulière de C si et seulement si $G = F \circ \Phi$, où $\Phi : [c,d] \to [a,b]$ est une fonction lisse surjective avec $\Phi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [c,d]$.

Correction (0 point(s)): *La fonction F est injective et est donc bijective sur son image. On peut donc considérer la fonction $\Phi = F^{-1} \circ G$. On a donc évidemment $G = F \circ \Phi$. Soit t_0 un élément de $[c,d]$. Notons $s_0 = \Phi(t_0)$. On sait que $F'(s_0) \neq 0$, on peut donc trouver $i \in \{1,\dots,n\}$, $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in [a,b] \cap [s_0-\varepsilon,s_0+\varepsilon] = [e,f]$, $F_i'(s) \neq 0$, et donc la restriction F_i' à*

$[e,f]$ *est un difféomorphisme sur son image. On a ainsi* $\Phi = F_i^{-1} \circ G_i$ *sur* $\Phi^{-1}([e,f])$, *comme* F_i *et* G_i *sont lisses,* Φ *est lisse et* $\Phi'(t_0) = G_i'(t_0)(F_i^{-1})'(G_i(t_0))$. *De plus, on a :* $G'(t_0) = \Phi'(t_0)F'(s_0)$ *et donc* $\Phi'(t_0) \neq 0$.

(2) Montrer que la dernière condition implique que $\Phi : [c,d] \to [a,b]$ est un homéomorphisme, et que $\Phi^{-1} : [a,b] \to [c,d]$ est lisse.

Correction (0 point(s)): *Le fait que* Φ *soit lisse de dérivée non nulle implique qu'elle est strictement monotone et bijective c'est donc un homéomorphisme, en effet* Φ^{-1} *est continue car dérivable. De plus, sa dérivée est donnée par* $(\Phi^{-1})'(s) = \frac{1}{\Phi' \circ \Phi^{-1}(s)}$ *ce qui montre qu'elle est elle-même dérivable. On peut continuer cet arguement et conclure que* Φ^{-1} *est lisse.*

Exercice 3.

(1) Donner les définitions d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$, du produit scalaire, du produit vectoriel et du produit mixte.

Correction (0 point(s)): *Un vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *est la donnée d'un triplet* (x,y,z) *de réels. Donnons nous trois vecteurs* $a := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *et* $b := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *et* $c := \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

— *Le produis scalaire de* a *et* b *est le réel* $a \cdot b$ *donné par la formule suivante :*

$$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

— *Le produit vectoriel de* a *et* b *est le vecteur* $a \times b$ *donné par la formule suivante :*

$$a \times b = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$

— *Le produit mixte de* a, b *et* c *est le scalaire* $(a \times b) \cdot c$. *C'est aussi le déterminant :*

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

(2) Montrer la commutativité du produit scalaire, l'anticommutativité du produit vectoriel, la distributivité des deux produits par rapport à l'addition de vecteurs. Y-a-t-il associativité pour le produit vectoriel ?

Correction (0 point(s)): *Donnons nous trois vecteurs* $a := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *et* $b := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *et* $c := \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

— *Commutativité du produit scalaire : on a bien*

$$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = b \cdot a.$$

— *Anti-commutativité du produit vectoriel : on a bien*

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} y_2z_1 - z_2y_1 \\ z_2x_1 - x_2z_1 \\ x_2y_1 - y_2x_1 \end{pmatrix} \\ &= -b \times a. \end{aligned}$$

— *Distributivité de l'addition pour le produit scalaire : on a bien :*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) + z_1(z_2 + z_3) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) \\ &= a \cdot b + a \cdot c. \end{aligned}$$

— *Distributivité de l'addition pour le produit vectoriel :* on a bien :

$$\begin{aligned} a \times (b+c) &= \begin{pmatrix} y_1(z_2+z_3) - z_1(y_2+y_3) \\ z_1(x_2+x_3) - x_1(z_2+z_3) \\ x_1y_2 - y_1(x_2+x_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1z_3 - z_1y_3 \\ z_1x_3 - x_1z_3 \\ x_1y_3 - y_1x_3 \end{pmatrix} \\ &= a \times b + a \times c \end{aligned}$$

— *Non associativité du produit vectoriel :* On a par exemple :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Démontrer la formule de Lagrange : $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$.

Correction (0 point(s)): *Donnons nous trois vecteurs* $a := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *et* $b := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *et* $c := \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$. *On calcule :*

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= a \times \begin{pmatrix} y_2z_3 - z_2y_3 \\ z_2x_3 - x_2z_3 \\ x_2y_3 - y_2x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1(x_2y_3 - y_2x_3) - z_1(z_2x_3 - x_2z_3) \\ z_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_1(x_2y_3 - y_2x_3) \\ x_1(z_2x_3 - x_2z_3) - y_1(y_2z_3 - z_2y_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1(x_2y_3 - y_2x_3) - z_1(z_2x_3 - x_2z_3) + x_1x_2x_3 - x_1x_2x_3 \\ z_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_1(x_2y_3 - y_2x_3) + y_1y_2y_3 - y_1y_2y_3 \\ x_1(z_2x_3 - x_2z_3) - y_1(y_2z_3 - z_2y_3) + z_1z_2z_3 - z_1z_2z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2a \cdot c - x_3a \cdot b \\ y_2a \cdot c - y_3a \cdot b \\ z_2a \cdot c - z_3a \cdot b \end{pmatrix} \\ &= b(a \cdot c) - c(a \cdot b). \end{aligned}$$

(4) En déduire la formule de Jacobi : $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

Correction (0 point(s)): *On calcule en utilisant la formule précédente :*

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) &= (b(a \cdot c) - c(a \cdot b)) + (c(b \cdot a) - a(b \cdot b)) + (a(c \cdot a) - b(c \cdot a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$