Série 11 – Correction

Exercice 1. Calculer l'application sphérique (l'application de Gauss) et trouver son image pour les surfaces suivantes.

(1) La sphère $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, $R > 0$.

Correction:

Lemme 1. *Si une surface S est donnée sous la forme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$ avec f une fonction sans point singulier, alors le vecteur normal à S en $P = (x, y, z)$ est donné par*

$$\frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|}.$$

Démonstration. Le vecteur en question est bien normalisé. Il suffit de montrer qu'il est orthogonal à n'importe quel vecteur du plan tangent. Par définition, le vecteur du plan tangent en P sont les vecteurs vitesses en P de courbe inclut dans S (et passant par P). Soit $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^3$ une courbe inclut dans S et passant par P en $t = 0$ quelconque. On a $g = f \circ \gamma(t) = 0$ pour tout $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, donc $g'(0) = 0$. Or on a, d'après la règle de la chaîne :

$$g'(0) = \gamma_1'(0) f_x(\gamma(0)) + \gamma_2'(0) f_y(\gamma(0)) + \gamma_3'(0) f_z(\gamma(0)) = ((\nabla f)(x, y, z)) \cdot \gamma'(0).$$

Ainsi le produit scalaire de $(\nabla f)(x, y, z)$ avec $\gamma'(0)$ est nul. Ce qui montre le résulat. □

Ici, on a $\Phi = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = 0\}$ avec $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. On a

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad et \quad |\nabla f(x, y, z)| = 2R.$$

Donc l'application de Gauss Γ est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \Phi & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{R}(x, y, z). \end{array}$$

L'image de Γ est clairement la sphère toute entière.

(2) L'ellipsoïde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Correction: *On procède de la même manière. Cette fois ci, on a $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Donc*

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix} \quad et \quad |\nabla f(x, y, z)| = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Donc l'application de Gauss Γ est définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \Phi & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right). \end{array}$$

L'image de Γ est là encore la sphère toute entière.

(3) Le paraboloïde elliptique $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2\}$.

Correction: *Cette fois on a* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. *Donc*

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\nabla f(x, y, z)| = \sqrt{1 + 4x^2 + 2y^2}.$$

Donc l'application de Gauss Γ *est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma\colon & \Phi & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 2y^2}}(2x, 2y, -1). \end{array}$$

L'image de Γ *est l'hémisphère sud ouvert.*

(4) Le paraboloïde hyperbolique $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = y^2 - x^2\}$.

Correction: *Cette fois on a* $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$. *Donc*

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\nabla f(x, y, z)| = \sqrt{1 + 4x^2 + 2y^2}.$$

Donc l'application de Gauss Γ *est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma\colon & \Phi & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 2y^2}}(2x, -2y, 1). \end{array}$$

L'image de Γ *est l'hémisphère nord ouvert.*

(5) L'hyperboloïde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2 - 1, z \geq 0\}$.

Correction: *Cette fois on a* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. *Donc*

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\nabla f(x, y, z)| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.2\sqrt{1 + 2z^2}.$$

Donc l'application de Gauss Γ *est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma\colon & \Phi & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1 + 2(x^2 + y^2)}}(x, y, -z). \end{array}$$

L'image de Γ *est* $\mathbb{S}^2 \cap \{|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$..

Exercice 2. Soient $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = xy\} \subset \mathbb{R}^3$ et $\Gamma : H \to S^2$ son application sphérique.

(1) Trouver les images des courbes $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\} \cap H$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = z = 0\} \cap H$ par l'application Γ.

Correction: *On commence par calculer l'application sphérique avec la technique de l'exercice précédent : on pose* $f(x, y, z) = xy - z$. *On a donc :*

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\nabla f(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Donc l'application de Gauss Γ *est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma\colon & \Phi & \to & \mathbb{S}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(y, x, -1). \end{array}$$

On cherche maintenant l'image des courbes $C_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z = 0\} \cap H$ *et* $C_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = z = 0\} \cap H$ *par l'application* Γ. *On commence par* C_1 *:*

Tout d'abord, on constate que $C_1 = \{(x,0,0)|x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{(0,0\}$*. L'image de* C_1 *par* Γ *est donc :*

$$\left\{ \frac{1}{1+x^2}(0,x,-1)|x \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est un demi équateur ouvert. Pour C_2*, c'est presque pareil : on trouve*

$$\left\{ \Gamma(C_2) = \frac{1}{1+y^2}(y,0,-1)|y \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est un méridien ouvert.

(2) Trouver les directions principales de H en $(0,0,0)$ et les images des sections normales correspondantes par Γ.

Correction: *En* $(0,0,0)$ *la première et la deuxième forme fondamentale sont données par :*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad II = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les directions principales sont donc les espaces propres de la deuxième forme fondamentale c'est à dire les espaces engendrés dans le plan tangent par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*. Dans* $\mathbb{R}^3$ *ces direction sont les espaces engendrés par* $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Le vecteur normal en* $(0,0,0)$ *est* $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*.*
Donc les sections normale sont donc les intersections de H *avec les plans dirigés par* $v_1 \times n$ *et* $v_2 \times n$*. C'est à dire les intersection de* H *avec les plan définis par* $\{x = y\}$ *et* $\{x = -y\}$*. Les deux courbes* C_1 *et* C_2 *sont donc données par* $\{(t,t,t^2)|t \in \mathbb{R}\}$ *et* $\{(t,-t,t^2)|t \in \mathbb{R}\}$*. Leurs images par* Γ *sont respectivement*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}(t,t,-1)|t \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}(t,-t,-1)|t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ce sont deux demi grand cercle qui se croisent au pôle sud.

Exercice 3. Soient $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité et $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a < z < b\} \cap \mathbb{S}^2$ pour $a,b \in (-1,1), a < b$. Démontrer la formule d'Archimède pour l'aire $S(A)$:

$$S(A) = 2\pi(b-a).$$

En déduire la formule $S(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.

Correction: *On considère* $B = [0,1] \times [-\pi/2, \pi/2]$*. On va paramétriser* $A_+ \cap \{x \geq 0\}$ *grâce à* B *: on considère la fonction suivante :*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & B & \to & \mathbb{S}^2 \\ & t,\theta & \mapsto & \frac{1}{R}(\sqrt{1-(a+(b-a)t)^2}\cos\theta, \sqrt{1--(a+(b-a)t)^2}\sin\theta, a+(b-a)t). \end{array}$$

qui donne bien un paramétrage de A_+*. On calcule la première forme fondamentale. Pour cela on calcule les dérivée partielle de* φ *:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= \frac{-(b-a)(a+(b-a)t)}{\sqrt{1-(a+(b-a)t)^2}}\cos(\theta) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} &= -\sqrt{1-(a+(b-a)t)^2}\sin\theta \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= \frac{-(b-a)(a+(b-a)t)}{\sqrt{1-(a+(b-a)t)^2}}\sin(\theta) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} &= \sqrt{1-(a+(b-a)t)^2}\cos\theta \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} &= b-a & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$I_{t,\theta} = \begin{pmatrix} \frac{(b-a)^2(a+(b-a)t)^2}{1-(a+(b-a)t)^2} + (b-a)^2 & 0 \\ 0 & 1-(a+(b-a)t)^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la première forme fondamentale en (t,θ) *est :*

$$(b-a)^2(a+(b-a)t)^2 + (b-a)^2(1-(a+(b-a)t)^2) = (b-a)^2$$

On a donc
$$S(A_+) = \iint_B |b-a| = \pi(b-a).$$
Par symétrie, $S(A_-) = S(A_+)$. *Donc* $S(A) = 2\pi(b-a)$. *En faisant tendre* a *vers* -1 *et* b *vers* 1, *on obtient* $S(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.