# Série 2 – Correction

**Exercice 1.** Donner la définition d'une fonction lisse de classe $C^\infty$ en termes vectoriels.

**Correction:** *La notion de continuité d'une fonction vectoriel ne pose pas de problème. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction, on dit qu'elle est* dérivable *en $t_0$ si il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hv + o(h).$$

*Dans ce cas le vecteur $v$ est noté $f'(t_0)$. La fonction $f$ est* dérivable *si elle est dérivable en $t$ pour tout $t$ de $[a,b]$. On définit alors la fonction dérivée de $f$ comme l'application $f' : [a,b] \ni t \mapsto f'(t) \in \mathbb{R}^n$.*

- *Une fonction vectoriel $f$ est de classe $C^0$ si elle est continue.*
- *Pour $k \geq 1$, une fonction vectoriel $f$ est de classe $C^k$ si elle est dérivable et que sa fonction dérivée est de classe $C^{k-1}$.*
- *Une fonction $f$ est de classe $C^\infty$ si elle est de classe $C^k$ pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$.*

**Exercice 2.** (1) Calculer l'hodographe des courbes suivantes :

(a) Le cercle unitaire $C$ en $\mathbb{R}^2$ paramétré par $t \mapsto (\cos(at), \sin(at))$, $a \neq 0$. En déduire la dépendance de l'hodographe de la paramétrisation.

**Correction:** *On rappelle que l'hodographe d'une courbe $C$ paramétrée par $\gamma$ est en fait la "courbe" paramétrée par les vitesses c'est à dire par $\gamma'$. Il est donc en particulier nécessaire que $\gamma$ soit dérivable pour pouvoir parler d'hodographe. Si $\gamma'$ est continue et injective, l'hodographe est une courbe élémentaire.*

*Il est facile d'assurer que $\gamma'$ soit continue en requérant que $\gamma$ soit de classe $C^1$, en revanche l'injectivité de $\gamma'$ est beaucoup plus difficile à assurer.*

*On commence par calculer les vecteurs vitesses. Ici on a $\gamma(t) = (\cos(at), \sin(at))$ et donc $\gamma'(t) = (-a\sin(at), a\cos(t))$. Ainsi l'hodographe de $C$ est le cercle de rayon $a$. On constate que si $a$ varie l'hodographe de la courbe $C$ varie. Il dépend donc du paramétrage.*

(b) L'hélice $H : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$.

**Correction:** *Comme précédemment, on calcule le vecteur vitesse. Ici $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, donc $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$. L'hodographe de $H$ est donc le cercle unité dans le plan horizontal d'équation $z = 1$.*

(2) Trouver les tangentes à $C$ et $H$ en et $(1,0)$ et $(1,0,0)$.

**Correction:** *On rappelle que la tangente à un point $p = \gamma(t)$ d'une courbe paramétrée $C$ par $\gamma$ est la droite affine de direction $\gamma'(t)$ qui passe par $p$. On reprend les paramétrage précédent*

<u>*Pour le cercle :*</u> $(1,0) = \gamma(0)$ *et on a $\gamma'(t) = (0,a)$. La tangente à $(1,0)$ est donc la droite*

$$\begin{aligned} D &= \{(1,0) + \lambda(0,a) |\ pour\ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1,0) + \lambda(0,1) |\ pour\ \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

*On constate que $D$ ne dépend donc pas de $a$.*

<u>*Pour l'hélice :*</u> $(1,0,0) = \gamma(0)$ *et on a $\gamma'(0) = (0,1,1)$ donc la tangente à $(1,0)$ est la droite*

$$D = \{(1,0,0) + \lambda(0,1,1) |\ pour\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(3) Vérifier l'indépendance de ces tangentes de la paramétrisation.

**Correction:** *Soient $\gamma_1$ et $\gamma_2$ deux paramétrisation régulière d'une même courbe élémentaire $C$. Soit $p$ un point de $C$. On pose $t_1$ et $t_2$ tel que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = p$. On va montrer que $\gamma_1'(t_1)$ et $\gamma_2'(t_2)$ sont colinéaires et non-nuls, on en déduira l'indépendance de la tangente.*

*On a vu la semaine dernière qu'il existait une difféomorphisme $\Phi$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \Phi$. En particulier on a $\Phi(t_2) = t_1$. On a*

$$\gamma_2'(t_2) = \Phi'(t_2)\gamma_1'(\Phi(t_2)) = \Phi'(t_2)\gamma_1'(t_1).$$

*Or on a vu aussi la semaine dernière que $\Phi'(t) \neq 0$ pour tout $t$. On en déduit que $\gamma_1'(t_1)$ et $\gamma_2'(t_2)$ sont colinéaires et non-nuls et engendre donc le même espace vectoriel $V$ (de dimension 1).*

*Par défintion, la tangente au point $p$ est la droite*

$$D = \{p + v | v \in V\}.$$

*Ainsi la tangente ne dépend pas de la paramétrisation.*

**Exercice 3.** Donner un exemple d'une courbe planaire $C \subset \mathbb{R}^2$ et d'une droite $L \subset \mathbb{R}^2$ telle que $L$ est tangente à $C$ en deux points différents.

**Correction:** *Si la courbe $C$ est un segment, la droite affine qui passe par ce segment, est la tangente en chacun des points de $C$, ce qui répond à la question. Mais ce n'est pas très jolie.*

*On construit donc une autre courbe $C$ paramétrée par $\gamma : [0, 4\pi] \ni t \mapsto (t, \sin(t))$. La droite $D$ d'équation $y = 1$, autrement décrite par*

$$\begin{aligned} D &= \{(0,1) + \lambda(1,0) | \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, \frac{\pi}{2}) + \lambda(1,0) | \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, \frac{5\pi}{2}) + \lambda(1,0) | \lambda \in \mathbb{R}\}.\} \end{aligned}$$

*Les deux dernières lignes rendent manifeste que $D$ est tangente à la courbe en $(0, \frac{\pi}{2}) = \gamma(\frac{\pi}{2})$ $(0, \frac{5\pi}{2}) = \gamma(\frac{5\pi}{2})$, en effet, on a $\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (1,0)$ et $\gamma'(\frac{5\pi}{2}) = (1,0)$.*

**Exercice 4.** Démontrer que la longueur du "flocon de Koch" est infinie.

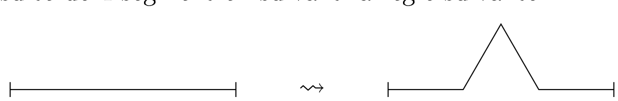
**Correction:** *La longueur $\ell(C)$ d'une courbe $C$ paramétrée par $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est définie par la formule suivante :*

$$\ell(C) = \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \sup_{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b} |\gamma(t_{i+1} - \gamma(t_i))|.$$

*On va voir dans le cours une formule plus pratique à utiliser dans le cas où $\gamma$ est lisse.*

*Le flocon de Koch $K_\infty$ est vu comme la limite (sans un sens qui n'est pour l'instant pas précis, mais qu'on pourrait préciser) d'une suite de courbe. La première courbe $K_0$ a longueur 1 et est un segment.*

*La nème courbe $K_n$ (paramétrée par $\gamma_n$)est constitué de $4^n$ segments de même longueur. Chaque segment a longueur $\frac{1}{3^n}$. Elle a donc longueur $\frac{4^n}{3^n}$. Pour fabriquer la $n+1$ème courbe, on remplace chaque segment de $K_n$ par une suite de 4 segment en suivant la règle suivante :*



*Chaque extrémité d'un segement de $K_n$ reste une extrémité d'un segement de $K_{n+1}$ ce point est donc dans la courbe limite.*

*en se servant de la définition de la longueur on obtient, en prenant $N = 4^n$ et en choisisant les $t_i$ de tel manière à ce que les $\gamma_n(t_i)$ soit précisément les extrémités des segments qui constituent $K_n$ on obtient :*

$$\ell(K_\infty) \geq \sum_{i=1}^{4^n} |\gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1})| = \ell(K_n) = \frac{4^n}{3^n}$$

*et donc la longeur de $K_\infty$ est infinie.*

**Exercice 5.** Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}$ pour $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Vérifier que le résultat coïncide avec la longueur du demi-cercle.

**Correction:** *On commence par calculer la dérivée de $f$ : $f$ est dérivable sur $(-1,1)$ et :*

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*On a donc pour tout $x$ dans $(-1,1)$*

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

*Il s'agit donc d'intégrer cette fonction. On a :*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

*On constate qu'il s'agit aussi de la longueur d'un demi-cercle. En fait ceci vient du fait que pour une paramétrisation régulière $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ d'une courbe $C$, on a :*

$$\ell(C) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_2 t.$$

*Cette formule sera montré dans le cours.*

*Ici on a utilisé $\gamma : [-1,1] \ni x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{R}^2$ qui décrit le demi-cercle.*