Série 3 – Correction

Exercice 1. Trouver le paramétrage normal pour

(1) l'intervalle $[(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)] \subset \mathbb{R}^3$;

Correction: *L'intervalle a pour longueur* $l(C) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$. *On cherche un paramétrage* $\gamma : [0, l(C)] \to \mathbb{R}^3$ *tel qu'en tout point* t *de* $[0, l(C)]$, *la vitesse* $\|\gamma'(t)\|$ *soit égale à 1. Il y a essentiellement deux choix correspondant au deux choix d'orientations possibles :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma_1 \colon & [0, l(C)] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_0, y_0, z_0) + \frac{t}{l(C)}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0). \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rccl} \gamma_2 \colon & [0, l(C)] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_1, y_1, z_1) + \frac{t}{l(C)}(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1). \end{array}$$

Il est clair que γ_1 *et* γ_2 *paramètrent l'intervalle. De plus, on a*

$$\|\gamma_1'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)\| = 1$$

et

$$\|\gamma_2'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} \|(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)\| = 1.$$

(2) la parabole demi-cubique $y = x^{\frac{3}{2}}$;

Correction: *On choisit tout d'abord un paramétrage de la parabole demi-cubique :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma \colon & [0, 1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, \sqrt{t^3}). \end{array}$$

On calcule maintenant la vitesse au point t *:*

$$\|\gamma'(t)\| = \|(1, \frac{3}{2}\sqrt{t})\| = \sqrt{\frac{9}{4}t + 1}.$$

La longueur de la courbe entre $\gamma(0)$ *et* $\gamma(t)$ *est donnée par la formule suivante :*

$$l(C[0, t]) = \int_0^t \sqrt{\frac{9}{4}s + 1} \mathrm{d}s = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{9}{4}t + 1\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

On résout l'équation en s $l(C[0, s]) = t$ *:*

$$\frac{8}{27}\left(\left(\frac{9}{4}s + 1\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = t$$

$$\left(\frac{9}{4}s + 1\right) = \left(\frac{27}{8}t + 1\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$s = \frac{4}{9}\left(\left(\frac{27}{8}t + 1\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right).$$

Le paramétrage normal de la courbe est donc :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_{normal} \colon & \left[0, \frac{2}{3}\left(\left(\frac{35}{8}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\right] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \left(\frac{4}{9}\left(\left(\frac{27}{8}t + 1\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right), \frac{8}{27}\left(\left(\frac{27}{8}t + 1\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}\right). \end{array}$$

(3) l'hélice $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos(t), \sin(t), at)$, où $a \in \mathbb{R}$ est une constante.

Correction: *On considère le paramétrage :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & [0,b] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & s & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), at) \end{array}$$

Comme précédemment, on calcule la vitesse en t :

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + a^2} = \sqrt{1+a^2}.$$

On résout l'équation en s $l([0,s]) = t$. On obtient $s = \frac{t}{\sqrt{1+a^2}}$.

L'équation normale de la courbe est donc :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_{normal}\colon & [0, \sqrt{1+a^2}b] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{1+a^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{1+a^2}}\right), \frac{at}{\sqrt{1+a^2}}\right) \end{array}$$

Exercice 2. Montrer que si la courbure d'une courbe élémentaire est égale à zéro en tout point, alors cette courbe est un intervalle.

Correction: *On suppose qu'une courbe élémentaire C dans $\mathbb{R}^n$ a une courbure nulle en tout point. Notons $\gamma : [0, l(C)]$ son paramétrage normal. On a $\gamma''(t) = 0$ pour tout t et donc. Ainsi, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, γ_i est une fonction affine. C'est à dire qu'il existe des réels $a_i et b_i$ tel que $\gamma_i(t) = a_i t + b_i$ pour tout t dans $[0, l(C)]$. Notons a et b les éléments de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont données par les a_i et les b_i respectivement. La courbe C est donc manifestement un intervalle dont les extrémités sont b et $l(C)a + b$. Notons au passage que a est un vecteur de norme 1.*

Exercice 3. Trouver le cercle osculateur à la parabole $y = x^2$ en tout point.

Correction: *On commence par un lemme qui permet calculer la courbure pour un paramétrage quelconque.*

Lemme 1. *Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, alors la courbure vectorielle au point $\gamma(t)$ est donnée (si elle est définie) par :*

$$K(\gamma(t)) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \times \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^4}.$$

Démonstration. Notons $\gamma_{\mathrm{n}} : [0, l(C)] \to \mathbb{R}^3$ un paramétrage normale de la courbe. On sait qu'il existe $\psi : [a,b] \to [0, l(C)]$ tel que $\gamma = \gamma_{\mathrm{n}} \circ \psi$. La courbure vectoriel au point $\gamma(t)$ est $\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(t))$. On a pour tout t dans $[0, l(C)]$:

$$\gamma'(t) = \psi'(t)\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(t)) \qquad \text{et} \qquad \gamma''(t) = \psi''(t)\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(t)) + \psi'(t)^2\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(t)).$$

On a donc :

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = |\psi'(t)^3|\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(t)) \times \gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(t)).$$

Ainsi, comme on sait que $\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(t))$ et $\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(t))$ sont orthogonaux, on a :

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \times \gamma'(t) = |\psi'(t)^4|(\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(t)) \times \gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(t))) \times \gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(t)) = |\psi'(t)^4|\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(t)).$$

La dernière égalité vient de du fait que si e et f sont deux vecteurs orthogonaux et e unitaires, alors $(e \times f) \times e = f$. Pour s'en rendre compte il suffit de considérer le cas où f est unitaire et de compléter (e, f) en une base orthonormal positive (e, f, g). On a alors :

$$(e \times f) \times e = g \times e = f.$$

De plus $\|\gamma'(t)\|^4 = |\psi'(t)|^4$, ce qui permet de conclure. □

Bien sûr, on peut se servir de ce lemme pour une courbe dans $\mathbb{R}^2$, il suffit pour cela de plonger $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Revenons à la parabole. Il est maintenant facile de calculer la courbure vectorielle au point (x, x^2) : on a par exemple :

$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & (x, x^2, 0) \end{array}$$

Et donc :

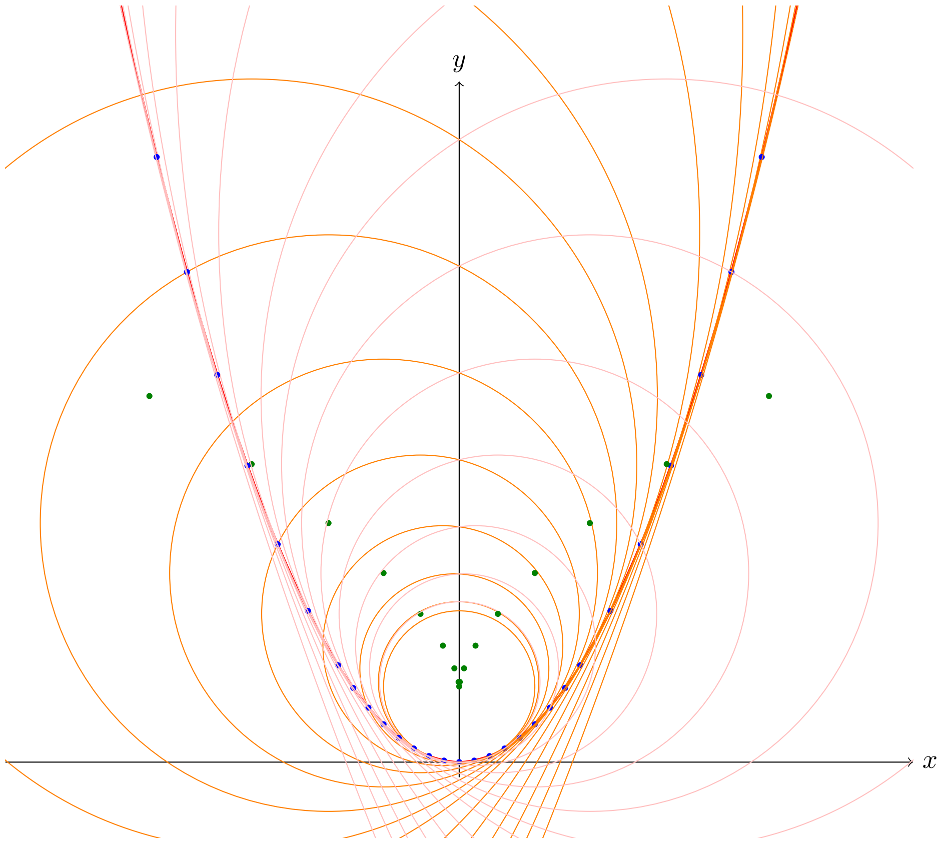
$$K((x, x^2, 0)) = \frac{((1, 2x, 0) \times (0, 2, 0)) \times (1, 2x, 0)}{(1+4x^2)^2} = \frac{1}{(1+4x^2)^2}(-4x, 2, 0).$$

Le rayon $R(x,x^2)$ du cercle osculateur au point (x,x^2) est donc

$$R = \frac{1}{\|K\|} = \frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{2}.$$

Le centre $O(x,x^2)$ du cercle osculateur est donné par :

$$O(x,x^2) = (x,x^2) + \frac{K(x,x^2)}{\|K(x,x^2)\|^2} = (x,x^2) + \frac{1}{(1+4x^2)^2} \cdot \frac{(1+4x^2)^4}{4(1+4x^2)}(-4x,2) = \left(-4x^3, \frac{1}{2} + 3x^2\right).$$



Exercice 4. Trouver le plan osculateur et le repère de Frenet à l'hélice $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), at)$ en tout point.

Correction: *Le plan osculateur à un point P d'une courbe est le plan affine engendré par le vecteur tangent et le vecteur normal à cette courbe (au point P) et passant par P.*

On considère le paramétrage

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [a,b] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), at) \end{array}$$

Pour déterminer le plan, nul besoin de normaliser : comme on l'a vu dans l'exercice précédent, le vecteur tangent est colinéaire à $\gamma'(t)$ et le vecteur normal est colinéaire à $(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \times \gamma'(t)$.

On peut le voir autrement : le plan est orthogonale à $(\gamma'(t) \times \gamma''(t))$. On a :

$$(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) = (-\sin(t), \cos(t), a) \times (-\cos(t), -\sin(t), 0) = (-a\sin(t), a\cos(t), 1)$$

Le plan osculateur à l'hélice en $P := (\cos(t), \sin(t), at)$ est donc le plan affine dirigé par le plan vectoriel d'équation :

$$-a\sin(t)x + a\cos(t)y + z = 0$$

Pour le point P, on a :

$$-a\sin(t)\cos(t) + a\cos(t)\sin(t) + at = at.$$

Le plan osculateur en P a donc pour équation :

$$-a\sin(t)x + a\cos(t)y + z = at.$$

Pour calculer le repère de Frenet, il suffit de normaliser le vecteur tangent, le vecteur normal et le vecteur binormal.

Pour le point P, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{t} &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-\sin(t), \cos(t), a)\\
\overrightarrow{n} &= (-\cos(t), -\sin(t), 0)\\
\overrightarrow{b} &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-a\sin(t), a\cos(t), 1).
\end{aligned}$$

Exercice 5. Démontrer que le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ d'une courbe C en $p \in C$ ne dépend pas de l'orientation de C. Néanmoins, le vecteur tangent $\overrightarrow{t}$ et le vecteur binormal $\overrightarrow{b}$ dépendent de l'orientation de C.

Correction: *Soit C une courbe élémentaire. Il existe deux paramétrages normaux pour C :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_+ : & [0, l(C)] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \gamma_+(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_- : & [0, l(C)] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \gamma_-(t) \end{array}$$

On passe de l'un a l'autre en utilisant

$$\begin{array}{rccc} \psi : & [0, l(C)] & \to & [0, l(C)] \\ & t & \mapsto & l(C) - t \end{array}.$$

On a $\gamma_+ = \gamma_- \circ \psi$ et $\gamma_- = \gamma_+ \circ \psi$.

Ces deux paramétrages normaux permettent a priori *de définir $\overrightarrow{t}_+$, $\overrightarrow{n}_+$ et $\overrightarrow{b}_+$ d'une part et $\overrightarrow{t}_-$, $\overrightarrow{n}_-$ et $\overrightarrow{b}_-$ d'autre part. On a*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{t}_+(s) &= \gamma_+'(s) & \qquad \overrightarrow{t}_-(s) &= \gamma_-'(s)\\
\overrightarrow{n}_+(s) &= \frac{\gamma_+''(s)}{|\gamma_+''(s)\|} & \overrightarrow{n}_-(s) &= \frac{\gamma_-''(s)}{|\gamma_-''(s)\|}\\
\overrightarrow{b}_+ &= \overrightarrow{t}_+ \times \overrightarrow{n}_+. & \overrightarrow{b}_- &= \overrightarrow{t}_- \times \overrightarrow{n}_-.
\end{aligned}$$

En un point $P = \gamma_+(s) = \gamma_-(\psi(s))$ donné, on a :

$$\overrightarrow{t}_- = \gamma_-'(\psi(s)) = -\psi'(s)\gamma_-'(\psi(s)) = -\gamma_+'(s) = -\overrightarrow{t}_+.$$

Donc le vecteur tangent dépend de l'orientation.

$$\gamma_-''(\psi(s)) = \psi'(s)^2\gamma_-''(\psi(s)) = \gamma_+''(s).$$

Donc le vecteur normal ne dépend pas de l'orientation. Enfin d'après sa définition, on a $\overrightarrow{b}_+ = -\overrightarrow{b}_-$. Donc le vecteur binormal dépend de l'orientation.