Série 4 – Correction

Exercice 1. Calculer le repère de Frenet pour les courbes suivantes.

(1) l'intervalle $[(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)] \subset \mathbb{R}^3$,

Correction: *Il n'y a* **pas** *de repère de Frenet. En effet, la courbure vectorielle est nulle, elle ne permet donc pas de définir un vecteur de base.*

(2) la parabole demi-cubique $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Correction: *On considère le paramétrage suivant :*

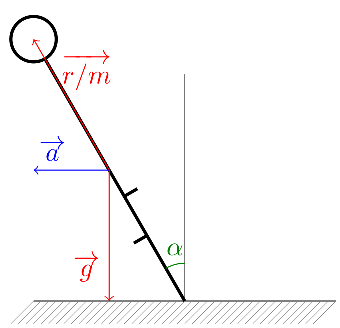
$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & [0,b] & \to & \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (t^2, t^3, 0) \end{array}$$

Pour s dans $[0,b]$, on a : $\gamma'(s) = (2s, 3s^2, 0)$ et $\gamma''(s) = (2, 6s, 0)$. Si $s > 0$, la vitesse et l'accélération sont non nulle (et non colinéaires) donc le repère de Frenet existe. On a donc, pour $s > 0$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t}(s) &= \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{4+9s^2}}, \frac{3s}{\sqrt{4+9s^2}}, 0\right), \\ \overrightarrow{b}(s) &= \frac{\gamma'(s) \times \gamma''(s)}{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|} = \left(0, 0, \frac{s}{|s|}\right) = (0,0,1) \quad \text{et} \\ \overrightarrow{n}(s) &= \overrightarrow{b}(s) \times \overrightarrow{t}(s) = \left(\frac{-3s}{\sqrt{4+9s^2}}, \frac{2}{\sqrt{4+9s^2}}, 0\right). \end{aligned}$$

Exercice 2. Considérons deux pistes rondes, une de rayon 100m et l'autre de rayon 200m et deux cyclistes empruntant les deux pistes. Supposons que la vitesse du deuxième cycliste est trois fois plus grande que celle du premier. Quel cycliste est le plus incliné ?

Correction: *Raisonnons abstraitement et considérons un cycliste sur une piste de rayon R et avec une vitesse v. On fait un bilan mécanique du cycliste dans le plan vertical contenant le rayon de la piste :*



La trajectoire du cycliste est donnée par la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & [0,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \left(R\cos\left(\frac{tv}{R}\right), R\sin\left(\frac{tv}{R}\right)\right). \end{array}$$

On connait donc l'accélération du cycliste :

$$\gamma''(t) = \left(-\frac{v^2}{R}\cos\left(\frac{tv}{R}\right), -\frac{v^2}{R}\sin\left(\frac{tv}{R}\right)\right)$$

D'autre part, on doit avoir $\overrightarrow{g} + \overrightarrow{r}/m = \overrightarrow{a}$. En particulier, en projetant sur l'axe vertical, on obtient

$$\|\overrightarrow{r}/m\|\sin(\alpha) = \|\overrightarrow{g}\|.$$

En projetant sur l'axe horizontal, on obtient

$$\|\overrightarrow{r}/m\|\cos(\alpha) = \|\overrightarrow{a}\| = \frac{v^2}{R}.$$

Ainsi, on a

$$\tan(\alpha) = \frac{v^2}{Rg}$$

On voit donc que l'angle d'inclinaison est une fonction croissante de $\frac{v^2}{R}$.

Dans la question : on a $\frac{v_2^2}{R_2} = \frac{9v_1^2}{2R_1} > \frac{9v_1^2}{2R_1}$. *Donc le deuxième cycliste est plus incliné que le premier.*

Exercice 3. Trouver les plans osculateurs pour les courbes

(1) $t \mapsto (t, t^2, t^3)$;

Correction: *Comme on l'a vu dans la série précédente, il est pratique (et facile) de calculer le vecteur binormal (ici on a pas besoin de normaliser) : Au point* $P = (t, t^2, t^3)$, *on a pour un certain scalaire* c :

$$c\overrightarrow{b} = \gamma'(t) \times \gamma''(t) = (1, 2t, 3t^2) \times (0, 2, 6t) = (6t^2, -6t, 2)$$

Le plan osculateur en P *est donc donné par l'équation :*

$$6t^2x - 6ty + 2z = 2t^3.$$

(2) $t \mapsto (t, t^3, t^4)$;

Correction: *Au point* $P = (t, t^3, t^4)$, *on a pour un certain scalaire* c :

$$c\overrightarrow{b} = \gamma'(t) \times \gamma''(t) = (1, 3t^2, 4t^3) \times (0, 6t, 12t^2) = (12t^4, -12t^2, 6t)$$

Le plan osculateur en P *est donc donné par l'équation :*

$$12t^4x - 12t^2y + 6tz = 6t^5.$$

Ceci n'est pas une équation de plan pour $t = 0$, *ce qui est normal car la courbure vectorielle est nulle. Néanmoins, on voit qu'en divisant par* t *on obtient une équation de plan pour tout* t :

$$12t^3x - 12ty + 6z = 6t^4.$$

On a donc en 0 un plan qui n'est pas à proprement parler un plan osculateur mais qui est limite des plans osculateurs au voisinage de 0.

(3) $t \mapsto (t^2, t^3, t^4)$.

Correction: *Au point* $P = (t^2, t^3, t^4)$, *on a pour un certain scalaire* c :

$$c\overrightarrow{b} = \gamma'(t) \times \gamma''(t) = (2t, 3t^2, 4t^3) \times (2, 6t, 12t^2) = (24t^4, -16t^3, 6t^2)$$

Le plan osculateur en P *est donc donné par l'équation :*

$$24t^4x - 16t^3y + 6t^2z = 14t^6.$$

Ceci n'est pas une équation de plan pour $t = 0$, *ce qui est normal car la courbure vectorielle est nulle. Néanmoins, on voit qu'en divisant par* t^2 *on obtient une équation de plan pour tout* t :

$$24t^2x - 16ty + 6z = 14t^4.$$

On a donc en 0 un plan qui n'est pas à proprement parler un plan osculateur mais qui est limite des plans osculateurs au voisinage de 0.

Les plans osculateurs, sont-ils bien-définis en tous points ?

Exercice 4. Soit $C \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ une courbe lisse. Soit $P \in C$ un point de la courbe.

(1) Donner une signification précise pour la phrase "la direction du virage de C en P est dans le sens des aiguilles d'une montre" en terme du vecteur de courbure.

Correction: *Le sens du virage dépend clairement du paramétrage (tout comme le vecteur de courbure). Tourner dans le sens des aiguilles d'une montre signifie qu'on est entrain de tourner vers la droite. Le vecteur de courbure est donc situé à droite du vecteur vitesse. Si on note* $\overrightarrow{t}$ *et* $\overrightarrow{n}$ *les vecteurs tangents et normale, ceci signifie que* $\overrightarrow{n} = \mathrm{rot}_{-\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{t})$.

(2) Montrer que le vecteur binormal est $(0, 0, -1)$ si la direction du virage de C en P est dans le sens des aiguilles d'une montre, et $(0, 0, 1)$ si la direction du virage de C en P est contre le sens des aiguilles d'une montre.

Correction: *On suppose que le virage de* C *en* P *est dans le sens des aiguilles d'une montre. Si on note* $\overrightarrow{t} = (a, b)$ *et* $\overrightarrow{n}$ *les vecteurs tangents et normale, on a* $\overrightarrow{n} = \mathrm{rot}_{-\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{t}) = (b, -a)$. *Le vecteur binormal est donc donné par :* $\overrightarrow{b} = (a, b, 0) \times (b, -a, 0) = (0, 0 - a^2 - b^2) = (0, 0, -1)$.

Si au contraire le virage de C *en* P *est contre le sens des aiguilles d'une montre, on a* $\overrightarrow{n} = \mathrm{rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{t}) = (-b, a)$ *et le vecteur binormal est donc donné par :* $\overrightarrow{b} = (a, b, 0) \times (-b, a, 0) = (0, 0a^2 + b^2) = (0, 0, 1)$.

Exercice 5. Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ une courbe lisse et Π son plan osculateur en un point $P \in C$.

(1) Démontrer que

$$\lim_{\substack{Q \to P \\ Q \in C}} \frac{\delta}{d^2} = 0.$$

Ici δ est la distance entre Q et Π et $d = |PQ|$

Correction: *Il va tout d'abord falloir exprimer* δ *et* d *de manière manipulable.*

On suppose qu'on dispose d'un paramétrage γ *de la courbe* C *tel que* $\gamma(0) = P = (0, 0, 0)$ *(on a translaté en 0) et* $\|\gamma'(t)\| = 1$ *pour tout* t. *On considère* $Q = \gamma(t)$. *On a alors* $d^2 = \|\gamma(t)\|^2 = \|0 + t\gamma'(0) + o(t)\|^2 = t^2 + o(t^2)$. *D'autre part,* $\delta = |\gamma(t) \cdot \overrightarrow{b}_P|$. *Ainsi*

$$\delta = \frac{|\gamma(t) \cdot (\gamma'(0) \times \gamma''(0))|}{\|\gamma''(0)\|}.$$

Or on a : $\gamma(t) = (0, 0, 0) + t\gamma'(0) + \frac{t^2}{2}\gamma''(0) + o(t^2)$. *Comme*

$$\gamma'(0) \cdot (\gamma'(0) \times \gamma''(0)) = \gamma''(0) \cdot (\gamma'(0) \times \gamma''(0)) = 0$$

, on obtient $\delta = o(t^2)$.

Ainsi on obtient $\frac{\delta}{d^2} = o(1)$ *et donc*

$$\lim_{\substack{Q \to P \\ Q \in C}} \frac{\delta}{d^2} = 0.$$

(2) Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un plan passant par P. Notons δ_Λ la distance entre Q et Λ. Montrer que si $\lim_{\substack{Q \to P \\ Q \in C}} \frac{\delta_\Lambda}{d^2} = 0$, alors $\Lambda = \Pi$.

Correction: *On garde les mêmes notations que précédemment, en particulier,* $P = (0, 0, 0)$. *Notons* $\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}$, *les vecteurs tangent, normal et binormal. Soit* Λ *un plan passant par* P, *il existe* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *tel que* Λ *soit orthogonal à* $a\overrightarrow{t} + b\overrightarrow{n} + c\overrightarrow{b}$. *Si on suppose* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, *on a* $\delta_\Lambda = \gamma(t) \cdot (a\overrightarrow{t} + b\overrightarrow{n} + c\overrightarrow{b})$. *On écrit* $\gamma(t) = 0 + t\gamma'(0) + \frac{t^2}{2}\gamma''(0) + o(t^2)$, *donc* $\delta_\Lambda = at + \frac{bt^2}{2} + o(t^2)$. *On a toujours* $d^2 = t^2 + o(t^2)$. *Ainsi si* $(a, b) \neq (0, 0)$, $\frac{\delta_\Lambda}{d^2}$ *ne tend pas vers 0.*