Série 6 – Correction

Exercice 1. (1) Trouver un difféomorphisme entre le carré ouvert $(-1,1)\times(-1,1)$ et le disque ouvert $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$.

Correction: *Il est facile de définir un homéomorphisme entre le disque ouvert et le carré ouvert. On peut par exemple définir*

$$\begin{aligned}\varphi\colon \quad (-1,1)\times(-1,1) &\to B_1(0_{\mathbb{R}^2})\\ (x,y) &\mapsto \begin{cases}(0,0) & \text{si } (x,y)=0,\\ \frac{\|(x,y)\|_\infty}{\|(x,y)\|_2}(x,y) & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Malheureusement, il ne s'agit pas d'un difféomorphisme. Trouver un tel difféomorphisme n'est pas facile. On va procéder en deux étapes et passant par $\mathbb{R}^2$ tout entier. Soit

$$\begin{aligned}f\colon \quad (-1,1)\times(-1,1) &\to \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\mapsto \left(\tan\left(\tfrac{\pi x}{2}\right),\tan\left(\tfrac{\pi y}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Il s'agit clairement d'un difféomorphisme car c'est une fonction lisse et on peut écrire son inverse :

$$\begin{aligned}f^{-1}\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to (-1,1)\times(-1,1)\\ (x,y) &\mapsto \left(\frac{2\arctan(x)}{\pi},\frac{2\arctan(y)}{\pi}\right)\end{aligned}$$

On construit ensuite

$$\begin{aligned}g\colon \quad B_1(0^2_{\mathbb{R}}) &\to \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\mapsto \begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=0,\\ \frac{\tan\left(\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Il est facile de construire g^{-1} :

$$\begin{aligned}g^{-1}\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to B_1(0^2_{\mathbb{R}})\\ (x,y) &\mapsto \begin{cases}0 & \text{si } (x,y)=0,\\ \frac{2\arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Les fonctions g et g^{-1} sont clairement lisse sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Inspectons la situation en 0 pour g. Soit $h=(x,y)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$, on a

$$\begin{aligned}g(x,y) &= \frac{\tan\left(\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\\ &= \frac{\pi}{2}(x,y)+o(\sqrt{x^2+y^2})\\ &= g(0,0)+\frac{\pi}{2}(x,y)+o(\sqrt{x^2+y^2}).\end{aligned}$$

Ainsi g est différentiable en 0 et sa différentielle en 0 est $\frac{\pi}{2}I_2$ qui est inversible. Donc g est différentiable en 0 et c'est même un difféomorphimse. Un difféomorphisme du disque ouvert vers le carré ouvert et donc donné par $g\circ f^{-1}$.

(2) Trouver un paramétrage de l'hémisphère $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}$ par le carré ouvert.

Correction: *Il est facile de trouver un paramétrage de l'hémisphère par le disque ouvert. On peut par exemple considérer :*

$$\begin{aligned}\xi\colon \quad B_1(0^2_{\mathbb{R}}) &\to \mathbb{R}^3\\ (x,y) &\mapsto \left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right).\end{aligned}$$

Pour obtenir un paramétrage de l'hémisphère par le carré ouvert, il suffit de précomposer $g^{-1} \circ f$. On obtient $\xi \circ g^{-1} \circ f$.

Exercice 2. Trouver une surface $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ contenant les courbes suivantes.

(1) *La courbe cubique normale* $t \mapsto (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Correction: *On peut par exemple considérer la surface donnée par le paramétrage suivant :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (t,u) & \mapsto & \left(t+u, t^2+u, t^3\right). \end{array}$$

Cette fonction est clairement lisse et injective. Montrons qu'il s'agit d'un paramétrage régulier. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(t,u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,u) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,u) = \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 3t^2 \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

qui est non nul pour toute valeur de t (et de u). Ainsi φ décrit bien une surface. Elle contient évidemment la courbe cubique normale.

(2) *L'hélice* $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Correction: *On peut par exemple regarder la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r,t) & \mapsto & (r\cos(t), r\sin(t), t) \end{array}$$

Cette fonction est clairement lisse et injective. Montrons qu'il s'agit d'un paramétrage régulier. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(r,t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(r,t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ r \end{pmatrix}$$

qui n'est jamais nul. Ainsi φ décrit bien une surface. Elle contient évidemment la courbe cubique normale. Elle contient évidemment l'hélice.

(3) *L'hélice* $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$ et la droite $s \mapsto (s, 0, 0)$, $s \in \mathbb{R}$.

Correction: *On peut par exemple considérer la surface donnée par le paramétrage suivant :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (s,t) & \mapsto & (\cos(t)+s, \sin(t), t). \end{array}$$

Cette fonction est clairement lisse et injective. Montrons qu'il s'agit d'un paramétrage régulier. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

qui toujours non nul. Ainsi φ décrit bien une surface. De plus, elle contient évidement l'hélice $\{(\cos(t), \sin(t), t) | t \in \mathbb{R}\}$, et la droite $\{(s, 0, 0) | s \in \mathbb{R}\}$.

(4) La droite $t \mapsto (0,t,1)$, $t \in \mathbb{R}$ et la droite $s \mapsto (s,0,0)$, $s \in \mathbb{R}$.

Correction: *On peut par exemple considérer la surface donnée par le paramétrage suivant :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & ((1-y)x, yx, y)\,. \end{array}$$

Cette fonction est clairement lisse et injective. Montrons qu'il s'agit d'un paramétrage régulier. On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

qui toujours non nul. Ainsi φ décrit bien une surface. Elle contient évidemment les deux droites $\{(0,t,1)|t \in \mathbb{R}\}$ et $\{s(s,0,0)|s \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3. Démontrer qu'un paramétrage $(u,v) \mapsto F(u,v) \in \mathbb{R}^3$, $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, est régulier si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $(u,v) \in\ U$.

Correction: *Notons*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix},$$

Par définition, le paramétrage F est régulier si et seulement si en tout point (u,v) de $\mathbb{R}^2$ l'un des determinant

$$d_3(u,v) := \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}, \quad d_1(u,v) := \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad d_2(u,v) := \begin{vmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial F_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

est non nul. Or on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} d_1(u,v) \\ d_2(u,v) \\ d_2(u,v). \end{pmatrix}$$

Ainsi le paramétrage F est régulier si $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial c}(u,v)$ ne s'annule pas.