Série 7 – Correction

Exercice 1. Trouver le plan tangent à la surface $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ au point $P = (x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ si :

(1) Φ est la sphère $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

Correction: *On démontre tout d'abord le lemme suivant :*

Lemme 1. *Supposons qu'une surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$ est donnée (localement autour de $P = (x_0, y_0, z_0)$) par une équation de la forme $f(x, y, z) = c$. Alors le plan tangent à S en P est dirigé par le vecteur $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ (pourvu que ce vecteur soin non-nul).*

Démonstration. On considère une courbe C dans S passant par P. On va montrer que la tangente à cette courbe en P est orthogonal à $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. Comme le plan tangent T_pS est la réunion de toute les tangentes, on aura bien que T_PS est dirigé par $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. On paramétrise C par $\gamma : [-1, 1] \to S$ un paramétrage régulier. Comme S est localement donnée par $f(x, y, z)c0$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $f \circ \gamma(t) = c$. Notons $g = f \circ \gamma$. On a $g'(0) = 0$ et donc $g'(0) = \gamma'(0) \cdot \nabla f(\gamma(0)) = 0 = \gamma'(0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$. □

Ainsi dans notre exemple, si on note $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ le plan tangent à Φ en P est dirigé par $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0, y_0, z_0)$. Finalement l'équation du plan tangent est :

$$x_0x + y_0y + z_0z = 1.$$

(2) Φ est l'hyperboloïde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2\}$.

Correction: *On note $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$. Le gradient de f en (x_0, y_0, z_0) est $(2x_0, -2y_0, -1)$. L'équation du plan tangent à P est donc :*

$$2x_0x - 2y_0y - z = 2x_0^2 - 2y_0^2 - z_0 = z_0.$$

Exercice 2. Trouver un paramétrage régulier pour :

(1) le demi-cercle $\{z = \frac{1}{2}, y \geq 0\}$ sur la sphère $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

Correction: *Il est facile de trouver un paramétrage. En effet, on prend par exemple :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma\colon & [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(t) \\ \sqrt{3}\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ce paramétrage est régulier.

(2) la courbe donnée par les conditions $\{x = 1, -1 \leq y \leq 1\}$ sur l'hyperboloïde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2\}$.

Correction: *Il est facile de trouver une paramétrage :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma\colon & [-1, 1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Il est clairement régulier.

Exercice 3. Trouver l'angle entre le parallèle $\{z = c\}$, $-1 < c < 1$, et le méridien $\{y/x = a, x > 0\}$, $a \in \mathbb{R}$ (ces deux courbes étant considérées sur la sphère $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$).

Correction: *Le parallèle a un paramétrage donné par :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_p : & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-c^2}\cos t \\ \sqrt{1-c^2}\sin t \\ c \end{pmatrix} \end{array}$$

Le méridien a un paramétrage donné par :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_p : & [0, \pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda^2}\cos t \\ \lambda \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = a$ *(donc* $\lambda = \sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}$*). Ces deux courbes se croisent au point*

$$P = \begin{matrix} \sqrt{1-c^2}\cos\alpha \\ \sqrt{1-c^2}\sin\alpha \\ c \end{matrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda^2}\cos\beta \\ \lambda\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

L'angle entre ces deux courbes est par définition l'angle entre leur deux vecteurs tangents qui sont donnés respectivement par

$$v_1 := \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 := \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\lambda^2}\sin\beta \\ -\lambda\sin\beta \\ \cos\beta. \end{pmatrix}$$

Montrons que ces deux vecteurs sont orthogonaux : On a :

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\lambda^2}\sin\beta \\ -\lambda\sin\beta \\ \cos\beta. \end{pmatrix} = \sin\beta\left(\sqrt{1-\lambda^2}\sin\alpha - \lambda\cos\alpha\right) = 0.$$

La dernière égalité vient des égalités définissant le point P. Les deux courbes font donc un angle de $\pi/2$.

Exercice 4. Trouver l'angle entre les courbes $x = 1$ et $y = 1$ sur la surface

(1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2\}$.

Correction: *Les courbes en jeu ont des paramétrages locaux donnés par :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & [1-\epsilon, 1+\epsilon] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2-1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \gamma_2 : & [1-\epsilon, 1+\epsilon] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Elles se croisent en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *qui correspond à $t = 1$ pour les deux courbes. Les vecteurs tangents sont*

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont de norme $\sqrt{5}$. L'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ entre les courbes satisfait l'équation suivante :

$$|v_1 \cdot v_2| = |v_1||v_2|\cos\theta.$$

On a donc $\cos\theta = \frac{4}{5}$ *et donc* $\theta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

(2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$.

Correction: *Les courbes en jeu ont des paramétrages locaux donnés par :*

$$\begin{array}{rrcl} \gamma_1 : & [1-\epsilon, 1+\epsilon] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrcl} \gamma_2 : & [1-\epsilon, 1+\epsilon] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \end{array}$$

Elles se croisent en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *qui correspond à* $t = 1$ *pour les deux courbes. Les vecteurs tangents sont*

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont de norme $\sqrt{2}$*. L'angle* $\theta \in [0, \pi/2]$ *entre les courbes satisfait l'équation suivante :*

$$|v_1 \cdot v_2| = |v_1||v_2| \cos\theta.$$

On a donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ *et donc* $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 5. Calculer la courbure des courbes de l'exercice 4 au point $x = y = 1$.

Correction: *On reprend les notations de l'exercice (et de sa correction) précédent.*

(1) *Il nous faut calculer la dérivée seconde des paramétrages :*

$$\gamma_1''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_2''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La courbure de la première courbe au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est donc*

$$\kappa_1 = \frac{|\gamma_1'(0) \times \gamma_1''(0)|}{|\gamma_1'(0)|^3} = \frac{2}{\sqrt{5}^3}.$$

De la même manière, la courbure de la deuxième courbe au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est :*

$$\kappa_2 = \frac{|\gamma_2'(0) \times \gamma_2''(0)|}{|\gamma_2'(0)|^3} = \frac{2}{\sqrt{5}^3}.$$

(2) *Ici, les deux courbes sont des droites, elles ont donc donc courbure nulle.*