Série 8 – Correction

Exercice 1. Trouver la première forme fondamentale pour les surfaces suivantes.

(1) Le paraboloïde elliptique $z = x^2 + y^2$.

Correction: *Notons*

$$F\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

On calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. *On a :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Donc la première forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}.$$

(2) Le paraboloïde hyperbolique $z = y^2 - x^2$.

Correction: *Notons*

$$F\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y^2-x^2 \end{array}$$

On calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. *On a :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -2x \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Donc la première forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1+4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}.$$

(3) Le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Correction: *Notons*

$$F\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

On calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. *On a :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Donc la première forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{x^2+y^2} & \frac{xy}{x^2+y^2} \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & 1+\frac{x^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

(4) Le demi-cône $z = \sqrt{y^2 - x^2}$, $y \geq |x|$.

Correction: *Notons*

$$F : \begin{array}{rcl} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq |x|\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{y^2 - x^2} \end{array}$$

On calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$. *On a :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Donc la première forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{y^2 - x^2} & \frac{-xy}{y^2 - x^2} \\ \frac{-xy}{y^2 - x^2} & 1 + \frac{y^2}{y^2 - x^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2 - x^2} \begin{pmatrix} x^2 & -xy \\ -xy & 2y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Trouver la seconde forme fondamentale pour les surfaces suivantes.

(1) Le paraboloïde elliptique $z = x^2 + y^2$.

Correction: **Rappel** *: Si une surface est paramétrée par une fonction* $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, *alors la deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire donnée par le matrice :*

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix},$$

où

$$h_{11} = \frac{\det\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)}{\|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\|},$$

$$h_{22} = \frac{\det\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)}{\|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\|},$$

$$h_{12} = h_{21} = \frac{\det\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)}{\|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\|}.$$

En particulier, si la surface est donnée par le graphe d'une fonction F, *on a :*

$$h_{11} = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}},$$

$$h_{22} = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}},$$

$$h_{12} = h_{21} = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}.$$

Ici on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Donc la deuxième forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Le paraboloïde hyperbolique $z = y^2 - x^2$.

Correction: *Ici on a*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Donc la deuxième forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Le cône $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Correction: *Ici, on a :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc la deuxième forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\frac{1}{\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Le demi-cône $z = \sqrt{y^2-x^2}$, $y \geq |x|$.

Correction: *Ici, on a :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{y^2-x^2}} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{-\sqrt{y^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{y^2-x^2}}}{y^2-x^2} = \frac{-y^2}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{y^2-x^2} - \frac{y^2}{\sqrt{y^2-x^2}}}{y^2-x^2} = \frac{-x^2}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc la deuxième forme fondamentale est donnée par la matrice :

$$\frac{1}{\sqrt{2y^2}(y^2-x^2)} \begin{pmatrix} -y^2 & xy \\ xy & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soient $\Phi = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère et $C \subset \Phi$ une courbe lisse telle que son plan osculateur au point $p = (x_0, y_0, z_0) \in C$ est $z = \frac{1}{2}$.

(1) Trouver la courbure de C en p.

Correction: *On se sert d'un résultat du cours qui nous dit que si deux courbes dans une surface S passant par un point P ont même plan osculateur (différent du plan tangent (pour être dans le cas $\cos\theta \neq 0$)) alors elles ont même courbure. Le cercle paramétré par*

$$\begin{aligned} \gamma\colon \quad [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(t), \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(t), \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

est clairement dans la sphère, passe par le point (x_0, y_0, z_0) et a pour plan osculateur en ce point le plan $\{z = \frac{1}{2}\}$, donc γ a la même courbure que C, et donc C a courbure $\frac{2}{\sqrt{3}}$ en (x_0, y_0, z_0).

(2) Trouver le repère de Frenet de C en p.

Correction: *On va démontrer le lemme suivant :*

Lemme 1. *Soient C_1 et C_2 deux courbes dans une surface S passant par un point P. On suppose qu'en ce point P, C_1 et C_2 ont le même plan osculateur et qu'elles ont courbures non-nulle. Alors pourvu que C_1 et C_2 soient orientées dans le même sens, elles ont le même repère de Frenet en P.*

Démonstration. Les vecteurs tangents à C_1 et C_2 en P sont à la fois dans le plan tangent à la surface en P (par définition du plan tangent) et dans le plan osculateur commun. L'intersection de ces deux plans est une droite. Donc les vecteurs tangents t_1 et t_2 à C_1 et C_2 sont fixés et donc égaux (au signe près). Quitte à modifier l'orientation de C_2, on peut supposer que $t_1 = t_2$.

Notons n_1 et n_2 les vecteurs normaux de C_1 et C_2 en P. On sait que n_1 et n_2 sont normaux à $t_1 = t_2$ et sont inclus dans le plan osculateur commun de C_1 et C_2. On a donc $n_1 = \pm n_2$. Il s'agit maintenant de montrer que $n_1 = n_2$. Notons n le vecteur normal à la surface. On a $n_1 \cdot n = \cos\theta_1$ et $n_2 \cdot n = \cos(\theta_2) \neq 0$, où θ_1 et θ_2 les angles entre n et n_1 et n_2. Or on a vu dans le cours que ces quantités ne dépend que du vecteurs tangents et des formes fondamentales. Ainsi on a $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et donc $n_1 = n_2$. Par suite, les repères de Frenet en P de C_1 et C_2 sont égaux. $\square$

Ainsi, dans notre cas, le repère de Frenet est le même que celui du cercles. On a donc :

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} y_0 \\ -x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$