Série 9 – Correction

Exercice 1. Soit $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ le tore obtenu par rotation autour du z-axe de la courbe

$$C = \{(x-2)^2 + z^2 = 1\}.$$

(1) Trouver un paramétrage local de Φ autour du point $(3, 0, 0)$.

Correction: *On va paramétrer x en fonction de y et z (on fait un dessin). On considère la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f_3\colon &]-\varepsilon,\varepsilon[^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (y,z) & \mapsto & \sqrt{4 + 4\sqrt{1-z^2} + 1 - z^2 - y^2}. \end{array}$$

(2) Trouver un paramétrage local de Φ autour du point $(1, 0, 0)$.

Correction: *On va paramétrer x en fonction de y et z (on fait un dessin). On considère la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f_1\colon &]-\varepsilon,\varepsilon[^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (y,z) & \mapsto & \sqrt{4 - 4\sqrt{1-z^2} + 1 - z^2 - y^2}. \end{array}$$

(3) Trouver les points elliptiques, hyperboliques et paraboliques sur Φ.

Correction: *On considère pour l'instant uniquement $\mathbb{T}^2_{z>0}$ l'ensemble des points du tore pour lesquelles $z > 0$. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x^2 + y^2 < 3\}$ et g la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} g\colon & U & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2}. \end{array}$$

Le demi-tore ouvert $\mathbb{T}^2_{z>0}$ est le graphe de g. On va calculer les formes fondamentales pour ce paramétrage (notons au passage la symétrie entre x et y). On a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{x(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{y(\sqrt{x^2+y^2}-2)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}}$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(y^4 + (x^2+11)y^2 - x^2)\sqrt{x^2+y^2} - 6y^2(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2)^{3/2}(-x^2-y^2+4\sqrt{x^2+y^2}-3)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(x^4 + (y^2+11)x^2 - y^2)\sqrt{x^2+y^2} - 6x^2(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2)^{3/2}(-x^2-y^2+4\sqrt{x^2+y^2}-3)^{3/2}}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{(x^2+y^2+12)\sqrt{x^2+y^2} - 6x^2 - 6y^2 - 6)xy}{(x^2+y^2)^{3/2}(-x^2-y^2+4\sqrt{x^2+y^2}-3)^{3/2}},$$

ce qui évidemment fait peur. Mais on va s'en sortir ! Comme le tore est invariant par rotation, on peut supposer sans perte de généralité que $y = 0$ et $x > 0$. On a alors :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{x(x-2)}{x\sqrt{1-(x-2)^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{1}{(-x^2+4x-3)^{3/2}},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{2-x}{x(-x^2+4x-3)^{1/2}},\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= 0,
\end{aligned}$$

ce qui est nettement plus raisonnable. Il s'agit maintenant de comprendre les signes et la nullité des valeurs propre de la deuxième forme fondamentale. C'est relativement facile :

— *Si $2 < x < 3$, les deux valeurs propres ont même signe (positif), on a donc des points elliptiques.*

— *Si $1 < x < 2$, le deux valeurs propres sont de signes opposés, on a donc des points hyperboliques.*

— *Si $x = 2$, l'une des valeurs propres est nulle, on a donc des points paraboliques.*

Il reste à traiter les cas $x = 1$ et $x = 3$. Pour ça, on se sert des paramétrages trouvés aux questions précédentes.

Pour $x = 3$, on se sert de f_3 :

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(y,z) = \frac{-y}{\sqrt{5+4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(y,z) = \frac{-z(\sqrt{-z^2+1}+2)}{\sqrt{5+4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2}\sqrt{-z^2+1}}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(y,z) &= \frac{-5-4\sqrt{-z^2+1}+z^2}{(5+4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2)^{3/2}},\\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}(y,z) &= -\frac{((z^2-1)y^2-z^2+13)\sqrt{-z^2+1}-2y^2-6z^2+14}{(-z^2+1)^{3/2}(5+4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2)^{3/2}},\\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}(y,z) &= \frac{-z(\sqrt{-z^2+1}+2)y}{(5+4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2)^{3/2}\sqrt{-z^2+1}}.
\end{aligned}$$

Comme tout à l'heure, c'est horrible, mais on s'intéresse, au point correspondant à $y = z = 0$. On a :

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(0,0) = \frac{-1}{3}, \qquad \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}(0,0) = \frac{-1}{27}, \qquad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}(0,0) = 0$$

Les deux valeurs propres ont même signes. Donc le point est elliptique.

Pour $x = 1$, on se sert de f_1 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(y,z) = \frac{-y}{\sqrt{5-4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(y,z) = \frac{-z(\sqrt{-z^2+1}-2)}{\sqrt{5-4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2}\sqrt{-z^2+1}}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(y,z) &= \frac{-5+4\sqrt{-z^2+1}+z^2}{(5-4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2)^{3/2}},\\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}(y,z) &= -\frac{((z^2-1)y^2-z^2+13)\sqrt{-z^2+1}+2y^2+6z^2-14}{(-z^2+1)^{3/2}(5-4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2)^{3/2}},\\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}(y,z) &= \frac{-z(\sqrt{-z^2+1}-2)y}{(5-4\sqrt{-z^2+1}-z^2-y^2)^{3/2}\sqrt{-z^2+1}}.
\end{aligned}$$

On s'intéresse, au point correspondant à $y = z = 0$. On a :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(0,0) = -1, \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}(0,0) = 0$$

Les deux valeurs propres ont signes différents donc le point est hyperbolique.

(4) Existent-ils des ombilics sur Φ ?

Correction: *Il n'y a pas d'ombilic sur Φ, en effet les seuls endroit où il pourrait y en avoir serait (pour $y = 0$ et $x > 0$) quand $2 < x < 3$. Or on a : Or en ces points, on peut couper le tore avec deux plans contenant le vecteurs normal pour obtenir un cercle de rayon 1 et une ellipse dont les deux rayons sont plus grand que strictement que 1. Il n'y a donc aucun ombilic sur le tore.*

Exercice 2. (1) Démontrer que tous les points d'un paraboloïde elliptique $z = ax^2 + by^2$, $ab > 0$, sont elliptiques.

Correction: *De manière géométrique : le paraboloïde elliptique est le paraboloïde osculateur en tout point, ce paraboloïde étant elliptique, tous les points sont elliptique.*

De manière calculatoire : si on note

$$f : {}^2 \quad \begin{array}{rcl} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ax^2 + by^2. \end{array}$$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

donc les valeurs propres de la deuxième formes fondamentales sont non nulles et de même signe en tout point, donc tous les points sont elliptiques.

(2) Démontrer que tous les points d'un paraboloïde hyperbolique $z = ax^2 + by^2$, $ab < 0$, sont hyperbolique.

Correction: *De manière géométrique : le paraboloïde hyperbolique est le paraboloïde osculateur en tout point, ce paraboloïde étant hyperbolique, tous les points sont hyperbolique.*

De manière calculatoire : si on note

$$f : {}^2 \quad \begin{array}{rcl} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ax^2 + by^2. \end{array}$$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

donc les valeurs propres de la deuxième formes fondamentales sont non nulles et de signes opposés en tout point, donc tous les points sont hyperbolique.

Exercice 3. (1) Trouver les directions des courbures principales d'un ellipsoïde $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $a, b, c > 0$, en les points d'intersections avec les plans coordonnés ($\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ et $\{z = 0\}$).

Correction: **Rappel :** *Si une surface est donnée comme le graphe d'une fonction f. Notons φ la fonction qui à (x, y) associe $(x, y, f(x, y))$. Les directions de courbures principales de la surface en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sont données par l'image par $\mathrm{d}\varphi(x_0, y_0)$ d'une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la première forme fondamentale et la deuxième forme fondamentale sont diagonales. En fait on peut même supposer que la première forme est donnée par la matrice identité, ainsi les valeurs propre de la deuxième sont les courbures principale, mais pour trouver les directions, ce n'est pas nécessaire.*

On considère les 6 paramétrages suivants :

$$\begin{array}{rrcl} f_{z\pm} : & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | ax^2 + by^2 < 1\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \pm\sqrt{\frac{1-ax^2-by^2}{c}} \\ f_{y\pm} : & \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | ax^2 + cz^2 < 1\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,z) & \mapsto & \pm\sqrt{\frac{1-ax^2-cz^2}{b}} \\ f_{x\pm} : & \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 | by^2 + cz^2 < 1\} & \to & \mathbb{R} \\ & (y,z) & \mapsto & \pm\sqrt{\frac{1-ax^2-by^2}{c}} \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{z\pm}}{\partial x} &= \pm\frac{-ax}{\sqrt{c(1-ax^2-by^2)}}\\
\frac{\partial f_{z\pm}}{\partial y} &= \pm\frac{-by}{\sqrt{c(1-ax^2-by^2)}}\\
\frac{\partial f_{y\pm}}{\partial x} &= \pm\frac{-ax}{\sqrt{b(1-ax^2-cz^2)}}\\
\frac{\partial f_{y\pm}}{\partial z} &= \pm\frac{-cy}{\sqrt{b(1-ax^2-cz^2)}}\\
\frac{\partial f_{x\pm}}{\partial y} &= \pm\frac{-by}{\sqrt{a(1-bx^2-cz^2)}}\\
\frac{\partial f_{x\pm}}{\partial z} &= \pm\frac{-cz}{\sqrt{a(1-bx^2-cz^2)}}
\end{aligned}$$

Ainsi quel que soit le paramétrage, la première forme fondamentale en $\{x=0\}\cup\{y=0\}\cup\{z=0\}$ est diagonale.

$$\frac{\partial^2 f_{z\pm}}{\partial x^2}(x,y) = \pm\frac{aby^2-a}{\sqrt{c}(1-ax^2-by^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f_{z\pm}}{\partial y^2}(x,y) = \pm\frac{abx^2-b}{\sqrt{c}(1-ax^2-by^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f_{z\pm}}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{-abxy}{\sqrt{c}(1-ax^2-by^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f_{y\pm}}{\partial x^2}(x,z) = \pm\frac{acz^2-a}{\sqrt{b}(1-ax^2-cz^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f_{y\pm}}{\partial z^2}(x,z) = \pm\frac{acx^2-c}{\sqrt{b}(1-ax^2-cz^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f_{y\pm}}{\partial x\partial z}(x,z) = \frac{-acxz}{\sqrt{b}(1-ax^2-by^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f_{x\pm}}{\partial y^2}(y,z) = \pm\frac{bcz^2-b}{\sqrt{a}(1-by^2-cz^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f_{x\pm}}{\partial z^2}(y,z) = \pm\frac{bcy^2-c}{\sqrt{a}(1-by^2-cz^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f_{x\pm}}{\partial y\partial z}(y,z) = \frac{-bcyz}{\sqrt{a}(1-ax^2-by^2)^{3/2}}$$

De même sur les plans des coordonnées les matrices des deuxièmes formes fondamentales sont diagonales. On peut donc prendre l'images par $\mathrm{d}\varphi_\bullet$ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On calcule facilement les différentielles des fonctions $\varphi_\bullet$.

$$\mathrm{d}\varphi_{z\pm}(0,y) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & \frac{-by}{\sqrt{cz}}\end{bmatrix},\quad \mathrm{d}\varphi_{z\pm}(x,0) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{-ax}{\sqrt{cz}} & 0\end{bmatrix},\quad \mathrm{d}\varphi_{y\pm}(0,z) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{-cz}{\sqrt{by}}\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{d}\varphi_{y\pm}(x,0) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{-ax}{\sqrt{by}} & \\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathrm{d}\varphi_{x\pm}(0,z) = \begin{bmatrix}0 & \frac{-cz}{\sqrt{ax}}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathrm{d}\varphi_{x\pm}(y,0) = \begin{bmatrix}\frac{-by}{\sqrt{ax}} & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Et les vecteurs colonnes de ces matrices donnent donc les direction des courbures principale.

(2) Démontrer qu'un ellipsoïde $ax^2+by^2+cz^2=1$, $a>b>c>0$, a au moins quatre ombilics.

Correction: *On continue le raisonnement de la question précédente : la forme fondamentale donnée par f_{z+} en $(0,0,\frac{1}{\sqrt{c}})$ est l'identité. On peut donc directement lire les courbures principales sur la seconde forme fondamentale : $-a/\sqrt{c}$ pour la direction $(1,0,0)$ et $-b\sqrt{c}$ pour la direction $(0,1,0)$.*

De même, la forme fondamentale donnée par f_{x+} en $(\frac{1}{\sqrt{a}},0,0)$ est l'identité. On peut donc directement lire les courbures principales sur la seconde forme fondamentale : $-b/\sqrt{a}$ pour la direction $(0,1,0)$ et $-c\sqrt{a}$ pour la direction $(0,0,1)$.

On regarde l'arc d'ellipse dans le plan $\{y=0\}$ situé entre $(0,0,\frac{1}{\sqrt{c}})$ et $(\frac{1}{\sqrt{a}},0,0)$. Le long de cet arc les directions de courbures principales varient de manière lisse (l'une est constante) et les courbures associé a ces directions varient elles-aussi de manière lisse. Ainsi une des courbure *passe de* $-a/\sqrt{c}$ *à* $-c/\sqrt{a}$ *tandis que l'autre passe de* $-b\sqrt{c}$ *à* $-b\sqrt{a}$*. Comme* $a < b < c$*. Il existe un point pour lequel ces deux courbures sont égales.*

Par symétrie, on obtient au moins quatres ombilics