Série 1 – Correction (corrigée le 26/02/2020)

Exercice 1. Soit X un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X.

(1) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu, alors $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles.

Correction : *On suppose que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X. On a donc $X \in A$ et si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$. Il s'agit de montrer que si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$. On considère $C \in \mathcal{A}^\omega$ définie par $C_0 = A, C_1 = B$ et $C_n = \emptyset = X^c$ pour tout $n \geq 2$. On a $\bigcup_{n\in\omega} C_n = A \cup B$. De plus comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\omega} C_n \in \mathcal{A}$, donc $A \cup B \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles.*

(2) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles, alors $\mathcal{A}$ est un anneau d'ensembles.

Correction : *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'ensemble. Il s'agit de montrer que $\mathcal{A}$ est non-vide — cela fait partie de la définition d'algèbre — et que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$. On considère donc $A, B \in \mathcal{A}$. On a $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, $A^c \in \mathcal{A}$, puis $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ et enfin $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

(3) Donner un exemple d'anneau d'ensembles qui n'est pas une algèbre d'ensembles.

Correction : *On peut prendre, $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$: c'est une algèbre d'ensembles sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur $\mathbb{R}$, car $\mathbb{R} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. De manière générale, un anneau d'ensembles $\mathcal{A}$ sur X est une algèbre d'ensemble si et seulement si $X \in \mathcal{A}$.*

(4) Soit $X = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ ou } X \setminus A \text{ est fini}\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles sur X mais pas une tribu.

Correction : *L'ensemble vide est fini par définition, donc $\mathbb{Z} \in \mathcal{A}$ car $\mathbb{Z}^c = \emptyset$.*

Soit $A \in \mathcal{A}$, de deux choses l'une : soit A est fini soit A^c est fini. Si A est fini alors $A = (A^c)^c$ est fini et donc $A^c \in \mathcal{A}$. Si A^c est fini alors $A^c \in \mathcal{A}$.

Soient maintenant $A, B \in \mathcal{A}$, on considère deux cas : A et B finis, et A^c ou B^c (ou les deux) fini. Si A et B sont finis, $A \cup B$ est fini et donc $A \cup B \in \mathcal{A}$. On passe au deuxième cas. On a $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et cet ensemble est manifestement fini, donc $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Ainsi, $\mathcal{A}$ est une algèbre.

Pour tout $n \in \omega$, le singleton $\{n\}$ est fini donc $\{n\} \in \mathcal{A}$. Mais $\omega = \bigcup_{n\in\omega}\{n\}$ n'est pas fini et son complémentaire dans $\mathbb{Z}$ non plus, donc $\omega \notin \mathcal{A}$ et donc $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu.

Exercice 2. Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Montrer l'implication $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

Correction : *Soient $A, B \in \mathcal{A}$. On a : $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Comme $\mathcal{A}$ est un anneau, $A \cup B$, $(A \setminus B)$ et $(B \setminus A)$ sont dans $\mathcal{A}$, on en déduit que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ et finalement que $A \cap B \in \mathcal{A}$.*

Exercice 3. Dans cet exercice, on souhaite montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ est engendrée par la famille $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}_{>a} \mid a \in \mathbb{Q}\}$, i.e. que $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma(\mathcal{F})$.

(1) Montrer que tout sous-ensemble de la forme $\mathbb{R}_{<b}$ avec $b \in \mathbb{Q}$ est dans $\sigma(\mathcal{F})$.

Correction : *Soit $b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \omega$. L'ensemble $\mathbb{R}_{>\left(b-\frac{1}{n+1}\right)}$ est dans $\mathcal{F}$. Comme $\sigma(\mathcal{F})$ est stable par passage au complémentaire, $\mathbb{R}_{\leq\left(b-\frac{1}{n+1}\right)}$ est dans $\sigma(\mathcal{F})$. Comme ceci est vrai pour tout $n \in \omega$, On en déduit que*

$$\mathbb{R}_{<b} = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{R}_{\leq\left(b-\frac{1}{n+1}\right)} \in \sigma(\mathcal{F}).$$

(2) En déduire que $\sigma(\mathcal{F})$ contient tous les intervalles ouverts bornés à bornes rationnelles.

Correction : *Soient $a < b$ deux rationnels, l'intervalle $]a; b[= \mathbb{R}_{<b} \cap \mathbb{R}_{>a}$, or on sait que $\mathbb{R}_{<b}$ et $\mathbb{R}_{>a}$ sont dans $\sigma(\mathcal{F})$, donc $]a; b[\in \mathcal{F}$.*

(3) Soit W un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$W = \bigcup_{\substack{]a;b[\subset W, \\ a,b\in\mathbb{Q}}}]a; b[.$$

On pourra utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction : *Notons $V = \bigcup_{\substack{]a;b[\subset W, \\ a,b\in\mathbb{Q}}}]a; b[$. On a clairement $V \subseteq W$. On veut montrer l'autre inclusion. Soit $x \in W$, comme W est ouvert, il est voisinage de chacun de ses points, en particulier de x. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon; x + \epsilon[\subseteq W$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut se donner $a, b \in \mathbb{Q}$ tel que*

$$x - \epsilon < a < x < b < x + \epsilon.$$

On a donc $x \in]a; b[\subseteq]x - \epsilon; x + \epsilon[\subseteq W$. De plus, on a clairement $]a; b[\subseteq V$, donc $x \in V$. Ceci montre que $W \subseteq V$ et finalement que $W = V$.

(4) En déduire que tout ouvert W de $\mathbb{R}$ appartient à $\sigma(\mathcal{F})$.

Correction : *D'après la question précédente, tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une union d'intervalles ouvert à bornes rationnelles. Il n'y a qu'un nombre dénombrable de tels intervalles. De plus on sait que chacun de ses intervalles est dans $\sigma(\mathcal{F})$, comme $\sigma(\mathcal{F})$ est une tribu, elle est stable par union dénombrable et donc tout ouvert de $\mathbb{R}$ est dans $\sigma(\mathcal{F})$.*

(5) Conclure.

Correction : *On vient de montrer que la tribu $\sigma(\mathcal{F})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ donc on a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Inversement, tous les ensembles dans $\mathcal{F}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et finalement $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

Exercice 4. Soient X un ensemble et $h\colon X \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ une application. Montrer que l'application $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ définie par $\mu(A) = \sum_{x\in A} h(x)$ est une mesure.

Correction : *On rappelle que la notion de somme positive utilisée ici est donnée par la première définition du cours. Avec cette définition, on a bien $\mu(\emptyset) = 0$. Il s'agit maintenant de vérifier que si $A \in \mathcal{P}(X)^\omega$ est disjoint, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n).$$

Par définition, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sup_{\substack{F\subseteq\bigcup_{n\in\omega} A_n \\ F \text{ fini}}} \left\{\sum_{x\in F} f(x)\right\}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\omega}\mu(A_n) &= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sum_{n\in E}\mu(A_n)\right\}\\
&= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sum_{n\in E}\sup_{\substack{F_n\subseteq A_n\\ F_n \text{ fini}}}\left\{\sum_{x\in F_n} f(x)\right\}\right\}\\
&= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sup_{\substack{(F_n)_{n\in E}\\ F_n\subseteq A_n \forall n\in E\\ F_n \text{ fini } \forall n\in E}}\left\{\sum_{n\in E}\sum_{x\in F_n} f(x)\right\}\right\}\\
&= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sup_{\substack{(F_n)_{n\in E}\\ F_n\subseteq A_n \forall n\in E\\ F_n \text{ fini } \forall n\in E}}\left\{\sum_{x\in\bigcup_{n\in E}F_n} f(x)\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

La troisième égalité est vraie car on fait commuter un somme finie *et un* sup*. Si E est un sous-ensemble fini de ω et si pour tout élément de E, F_n est un sous-ensemble fini de A_n, $\bigcup_{n\in E}F_n$ est un sous-ensemble fini de $\bigcup_{n\in\omega}A_n$. Ceci implique que*

$$\sum_{n\in\omega}\mu(A_n)\le\mu\left(\bigcup_{n\in\omega}A_n\right)$$

Réciproquement,

Si F est un sous-ensemble fini de $\bigcup_{n\in\omega}A_n$, en posant $F_n = A_n\cap F$ et $E=\{n\in\omega : F_n\neq\emptyset\}$, on a $F=\bigcup_{n\in E}F_n$ et les ensembles E et F_n sont finis. Ceci montre que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega}A_n\right)\le\sum_{n\in\omega}\mu(A_n).$$

Finalement,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega}A_n\right)=\sum_{n\in\omega}\mu(A_n).$$