Série 10 – Correction (corrigée le 6/05/2020)

Dans les exerices 1 et 2, on a besoin des notations suivantes. Supposons qu'on dispose de (X, μ_X) et (Y, μ_Y) deux espaces mesurés et de $g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ tel que tout $x \in X$, la fonction $g(x,\cdot)\colon Y \ni y \mapsto g(x,y)$ est dans $L^1(Y,\mathbb{R})$. Pour tout x, la quantité $\int_Y g(x,\cdot)$ est bien défini. Supposons que $h\colon X \ni x \mapsto \int_Y g(x,\cdot) \in \mathbb{R}$ est dans $L^1(X,\mathbb{R})$. Alors la quantité $\int_X h$ est notée

$$\int_X \int_Y g(x,y)\mathrm{d}\mu_Y(y)\mathrm{d}\mu_X(x).$$

Exercice 1. On note δ la mesure de comptage sur ω et δ_2 la mesure de comptage sur ω^2. On définit

$$f\colon \quad \omega^2 \to \mathbb{R}, \qquad (m,n) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ -1 & \text{si } n = m+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que $\int_{\omega^2} f\mathrm{d}\delta_2$ n'existe pas.

Correction : *On a*

$$f_+(n,m) = \begin{cases} 1 & si\ n = m, \\ 0 & sinon. \end{cases} \quad et f_-(n,m) = \begin{cases} 1 & si\ n = m+1, \\ 0 & sinon. \end{cases}.$$

et donc $f_+ = \chi_\Delta$ avec $\Delta = \{(k,k) | k \in \omega\}$. or $\delta_2(\Delta) = +\infty$, donc $\int_{\omega^2} f$ n'est pas défini.

(2) Calculer $\int_\omega \int_\omega f(m,n)\mathrm{d}\delta(m)\mathrm{d}\delta(n)$ et $\int_\omega \int_\omega f(m,n)\mathrm{d}\delta(n)\mathrm{d}\delta(m)$ après avoir justifié leurs existences.

Correction : *Toutes les fonctions sont mesurables car ω^2 et ω sont munis de leur tribus discrètes respectives.*

On fixe m et on considère la fonction $f(m,\cdot)\colon \omega \to \mathbb{R}$. On a $f(m,\cdot)_+ = \chi_{\{m\}}$ et $f(m,\cdot)_- = \chi_{\{m+1\}}$.

Ces deux fonctions sont étagées et il est donc facile de calculer leurs intégrales. On a

$$\int_\omega f(m,\cdot) = 1 - 1 = 0$$

Notons $g\colon \omega \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $g(m) = \int_\omega f(m,\cdot)$. On a $g = 0$. Cette fonction est intégrable et $\int_\omega g = 0$. Ainsi, $\int_\omega \int_\omega f(m,n)\mathrm{d}\delta(m)\mathrm{d}\delta(n) = 0$.

Pour l'autre sens, les calculs sont similaires (mais pas identiques) : On fixe $n \in \omega$ et on considère la fonction $f(\cdot,m)\colon \omega \to \mathbb{R}$. On a $f(\cdot,n)_+ = \chi_{\{n\}}$ et $f(\cdot,n)_- = \chi_{\{n-1\}}$, avec la convention que $\chi_{\{-1\}} = 0$. Ces deux fonctions sont étagées et il est donc facile de calculer leurs intégrales. On a

$$\int_\omega f(\cdot,n) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & si\ m > 0, \\ 1 - 0 = 1 & si\ m = 0. \end{cases}$$

Notons $h\colon \omega \to \mathbb{R}$, la fonction définie par $g(n) = \int_\omega f(\cdot,n)$. On a $h = \chi_{\{0\}}$. Cette fonction est intégrable et $\int_\omega h = 0$. Ainsi, $\int_\omega \int_\omega f(m,n)\mathrm{d}\delta(m)\mathrm{d}\delta(n) = 1$.

On constate que les deux intégrales doubles ont des valeurs différentes.

Exercice 2. On considère les espaces mesurés $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\lambda_1}, \lambda_1)$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta)$, où δ est la mesure de comptage. Soit $\Delta = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x_1 = x_2 \le 1\}$.

Montrer que

$$\int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(x)\mathrm{d}\delta(y) \neq \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x,y)\mathrm{d}\delta(y)\mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Correction : *On va calculer ces deux intégrales doubles.*

On fixe $y \in \mathbb{R}$. Si $y \notin [0,1]$, $\chi_\Delta(\cdot, y)$ est la fonction $\chi_{\{y\}}$ on a donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y)\mathrm{d}\lambda_1 = 0$ car $\lambda_1(\{y\}) = 1$. Si $y \notin [0,1]$, $\chi_\Delta(\cdot, y)$ est la fonction nulle, donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y)\mathrm{d}\lambda_1 = 0$. Ainsi la fonction $y \mapsto \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y)\mathrm{d}\lambda_1$ est la fonction nulle. Donc son intégrale est nulle également et donc $\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y)\mathrm{d}\lambda_1(x)\mathrm{d}\delta(y) = 0$

Pour l'autre intégrale, on commence par fixer $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [0,1]$, $\chi_\Delta(x, \cdot)$ est la fonction $\chi_{\{x\}}$, on a donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, \cdot)\mathrm{d}\lambda_1 = 1$ car $\delta(\{x\}) = 1$. Si $y \notin [0,1]$, $\chi_\Delta(\cdot, y)$ est la fonction nulle, donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y)\mathrm{d}\lambda_1 = 0$. Ainsi la fonction $y \mapsto \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y)\mathrm{d}\lambda_1$ est égale à $\chi_{[0,1]}$. Son intégrale pour la mesure de Lebesgue est égale à 1, donc $\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y)\mathrm{d}\delta(y)\mathrm{d}\lambda_1(x) = 1$.

Finallement on a bien :

$$0 = \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y)\mathrm{d}\lambda_1(x)\mathrm{d}\delta(y) \neq \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y)\mathrm{d}\delta(y)\mathrm{d}\lambda_1(x) = 1.$$

Exercice 3. Montrer que $p\colon (\mathbb{R}^{d+1}, \mathcal{A}_{\lambda_{d+1}}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_{\lambda_d})$, définie par $(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \mapsto (x_1, \ldots x_d)$, est mesurable.

Correction : *Attention, on parle ici des tribus de Lebesgue et non des boréliens, on ne peut donc pas argumenter avec la continuité.*

Soit A une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}^d$. On a $p^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que cet ensemble est lui même mesurable. Pour cela on utilise la caractérisation de Carathéodory : on veut montrer que pour toute partie $B \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$

$$\lambda_{d+1}(B) = \lambda_{d+1}(B \cap p^{-1}(A)) + \lambda_{d+1}(B \setminus p^{-1}(A)).$$

On a vu en cours qu'il suffisait de la vérifier pour des pavés ouverts.

On écrit donc $B = P \times]a, b[$ avec P un pavé ouvert de dimension d. On a $\lambda_{d+1}(B) = \lambda(P) \times (b - a)$. D'autre part $B \cap p^{-1}(A) = (P \cap A) \times]b - a[$ et $B \setminus p^{-1}(A) = (P \setminus A) \times]a, b[$. Par hypothèse A est mesurable, donc $P \cap A$ et $P \setminus A$ le sont aussi. Il suffit donc de démontrer que pour tout C mesurable de $\mathbb{R}^d$, $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) = (b - a)\lambda_d(C)$.

Si $(P_j)_{j\in J}$ est un recouvrement au plus dénombrable de C par des pavés ouverts, alors $(P_j \times]a, b[)_{j\in J}$ est un est un recouvrement au plus dénombrable de $C \times]a, b[$ par des pavés ouverts. On en déduit, $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) \leq (b - a)\lambda_d(C)$.

Soit $(P_j \times I_j)_{j\in J}$ un recouvrement au plus dénombrables de $C \times]a, b[$. Pour tout $x \in C$, on définit, $f(x) = \sum_{j\in J_x} \lambda_1(I_j)$ où J_x est le sous-ensemble des $j \in J$ tel que $x \in P_j$. Autrement dit, $f = \sum_{j\in J} \lambda_1(I_j)\chi_{P_j}$. Cette fonction est mesurable car suprémum d'une famille dénombrable de fonctions étagées. D'après le théorème de convergence monotone, son intégrale égale $\sum_{j\in J} \lambda_{d+1}(P_j \times I_j)$. De plus, pour tout $x \in C$, $f(x) \geq \lambda_1(]a, b[) = b - a$, donc $\int_{\mathbb{R}^d} f \geq \int_{\mathbb{R}^d} (b - a)\chi_C = (b - a)\lambda_d(C)$. Ceci montre que $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) \geq (b - a)\lambda_d(C)$ et donc $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) = (b - a)\lambda_d(C)$.

Exercice 4. On veut prouver l'énoncé suivant :

Soit $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a; b]$ et telle que f' est bornée. Alors f' est Lebesgue-intégrable et

$$\int_{[a;b]} f' = f(b) - f(a).$$

Pour l'intégrale de Riemann, l'énoncé analogue est : *Soit $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a; b]$ et telle que f' est Riemann-intégrable. Alors*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Soit $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a; b]$ et telle que f' est bornée. On définit pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{n}{b-a} f(x + \frac{b-a}{n}) - \frac{n}{b-a} f(x)$ si $a \leq x \leq \frac{(n-1)b+a}{n}$ et $f_n(x) = f'(b)$ si $x > \frac{(n-1)b+a}{n}$.

(1) Montrer que $\int_{[a,b]} f_n \underset{n\to\infty}{\to} f(b) - f(a)$.

Indication : On pourra se servir de la Riemann-intégrabilité de f_n.

Correction : *Soit F une primitive de f. On a*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f_n &= \int_{\left[a,\frac{a+(n-1)b}{n}\right]} \frac{n}{b-a} f\left(x+\frac{b-a}{n}\right) - \frac{n}{b-a} f(x)\mathrm{d}\lambda(x) + \int_{\left[\frac{a+(n-1)b}{n},b\right]} f'(1) \\ &= \frac{n}{b-a}\left(F(b) - F\left(\frac{(n-1)a+b}{n}\right)\right) - \frac{n}{b-a}\left(F\left(\frac{(n-1)b+a}{n}\right) - F(a)\right) + \frac{b-a}{n} f'(1). \\ &= \frac{F(b)-F(b-\frac{b-a}{n})}{\frac{b-a}{n}} - \frac{F(a+\frac{b-a}{n})-F(a)}{\frac{b-a}{n}} + + \frac{b-a}{n} f'(1). \\ &\underset{n\to\infty}{\to} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

(2) Montrer que f' est Lebesgue-intégrable sur $[a;b]$ et que $\int_{[a;b]} f' = f(b) - f(a)$.

Correction : *On va utiliser le théorème de convergence dominée. D'une part $(f_n)_{n\in\omega}$ converge ponctuellement vers f' sur $[a,b]$ et pour tout n, la fonction f_n sont intégrable (car continue sur un segment). Il reste à prouver la dominiation. On va utiliser l'hypothèse faites sur f'. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel $|f'(x)| < M$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $n \geq 1$ et $x \in \left[a, \frac{(n-1)b+a}{n}\right]$. D'après le théorème des accroissement fini, il existe $c \in \left[x, x+\frac{b-a}{n}\right]$ tel que $f_n(x) = f'(c)$. D'autre part si $x \in \left[\frac{(n-1)b+a}{n}, b\right]$, $f_n(x) = f'(1)$. Dans tous les cas $|f_n(x)| < M$. De plus la fonction constante égale à M est dans $L^1([a;b])$ donc on peut appliquer le théorème de convergence dominé et déduire d'une part que f' est dans $L^1([a;b])$ et que $\int_{[a;b]} f' = f(b) - f(a)$.*