Série 11 – Correction (corrigée le 13/05/2020)

Exercice 1. Soit $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i))_{i\in 1,2,3}$ une collection de trois espaces mesurés. On suppose de plus que μ_1, μ_2 et μ_3 sont σ-finies.

(1) Montrer que $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$.

Correction : *On va montrer que ces deux tribus sont égales à la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$ engendrée par $(A_1 \times A_2 \times A_3)_{\substack{A_1\in\mathcal{A}_1\\ A_2\in\mathcal{A}_2\\ A_3\in\mathcal{A}_3}}$. Par symétrie, il suffit de montrer que $(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)\otimes\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\otimes\mathcal{A}_3$. Soient $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ et $A_3 \in \mathcal{A}_3$. L'ensemble $A_1\times A_2$ est dans $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, donc $A_1\times A_2\times A_3 \in (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3$. Ceci montre que $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 \subseteq (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3$.*

Montrons l'autre inclusion. Soient $A_3 \in \mathcal{A}_3$ et $B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ fixés quelconques. Par définition de tribu engendrée, il suffit de montrer que $B \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$. Considérons

$$\mathcal{T}_{A_3} = \{\, A \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2) \mid A \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 \} .$$

On vérifie aisément, que $\mathcal{T}_{A_3}$ est une tribu. Or elle contient la famille $(A_1 \times A_2)_{\substack{A_1\in\mathcal{A}_1\\ A_2\in\mathcal{A}_2}}$. Elle contient donc la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et donc $B \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$.

(2) Montrer que $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$, (où $\alpha \times \beta$ désigne la mesure produit maximale de α et β).

Correction : *On vérifie facilement que l'ensemble des réunions disjointes finies d'ensembles de la forme $A_1 \times A_2 \times A_3$ avec $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ et $A_3 \in \mathcal{A}_3$ est une algèbre d'ensemble (c'est comme la Proposition 12 du cours). On la nomme $\mathcal{D}$. On a $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$. De plus, on sait que pour tout $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$,*

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3(A_1 \times A_2 \times A_3) &= (\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2)\mu_3(A_3) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3)\\ &= \mu_1(A_1)(\mu_2 \times \mu_3)(A_2 \times A_3) = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)(A_1 \times A_2 \times A_3).\end{aligned}$$

On en déduit que les restrictions de $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ et $\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ à $\mathcal{D}$ sont égales à une prémesures sur $\mathcal{D}$ disons ρ. Autrement dit, $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ et $\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ sont deux prolongements de ρ à $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$, elles sont donc toutes deux égales au prolongement de Hahn–Kolmogorov de ρ, car ρ est clairement σ-finie.

Exercice 2. Soit $B \in (\mathcal{A}_{\lambda_m})^\omega$ disjoint et $C \in (\mathcal{A}_{\lambda_n})^\omega$ disjoint. Soit $A := \sqcup_{i\in\omega} B_i \times C_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+n})$. Montrer que :

$$\overline{\chi_A} = \underline{\chi_A} \;=\; \sum_{i\in\omega} \lambda_n(C_i)\ \chi_{B_i} \;\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, [0; +\infty]).$$

Correction : *Soit $x \in \mathbb{R}^m$ fixé. De deux choses l'une : soit $x \in \bigsqcup_{i\in\omega} B_i$, soit $x \notin \bigsqcup_{i\in\omega} B_i$. Commençons par le deuxième cas. On souhaite montrer que $\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = 0$. Dans ce cas là, la fonction $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \chi_A(x, y)$ est la fonction nulle, elle est donc dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x, y)\mathrm{d}y = 0.$$

Supposons maintenant que $x \in \bigsqcup_{i\in\omega} B_i$. Notons j l'unique entier tel que $x \in B_j$. Là encore deux cas de figure se présente : soit $\lambda_n(C_j) < +\infty$, soit $\lambda_n(C_j) = +\infty$. Dans le premier cas, on peut argumenter exactement comme avant. En effet, on souhaite montrer que $\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = \lambda(C_j)$. La fonction $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \chi_A(x, y)$ est égale à χ_{C_j} , elle est donc dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{C_j} = \lambda_n(C_j)$$

Supposons maintenant que $\lambda_n(C_j) = +\infty$, dans ce cas, on souhaite montrer que $\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = +\infty$. La fonction $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \chi_A(x,y)$ est égale à χ_{C_j} qui n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et comme elle est positive, $f \geq \chi_{C_j}$ implique $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, ainsi par définition de l'infimum sur un ensemble vide, on a $\overline{\chi_A(x)} = +\infty$. Pour tout $k \in \omega$, $\chi_{C_j \cap [-k,k]}$ est dans L^1 et $\chi_{C_j \cap [-k,k]} \leq \chi_{C_j}$ et donc $\lambda_n(C_j \cap [-k,k]) \leq \overline{\chi_{C_j}}$. Or $\lambda_n(C_j \cap [-k,k]) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_n(C_j) = +\infty$. Donc $\overline{\chi_{C_j}} = +\infty$.

Enfin $\overline{\chi_A}$ est mesurable comme somme dénombrables de fonctions mesurables.

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n}; \overline{\mathbb{R}})$. Notons (E) la conjonction des deux assertions suivantes :

(i) $\underline{f}, \overline{f} \in L^1(\mathbb{R}^m; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) $\int \underline{f} = \int \overline{f} = \int f$.

Notons (E') la conjonction des trois assertions suivantes :

(a) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$, $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n; \overline{\mathbb{R}})$.

(b) Il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^m; \overline{\mathbb{R}})$ telle que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\int f(x,\cdot) = g(x)$.

(c) $\int g = \int f$.

Montrer que (E) équivaut à (E').

Correction : *On commence par supposer (E) et on va montrer les points (a), (b) et (c). Comme $\underline{f} \leq \overline{f}$, on déduit de (ii) que $\underline{f} = \overline{f}$ p.p. Notons N l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^m$ tel $\underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)$. Pour tout $x \notin N$, on a $\underline{\int_{\mathbb{R}^n}} f(x,y)\mathrm{d}y = \overline{\int_{\mathbb{R}^n}} f(x,y)\mathrm{d}y$, on a donc $y \mapsto f(x,y) \in L^1$ ce qui montre le point (a) et $\underline{f} = \underline{\int_{\mathbb{R}^n}} f(x,y)\mathrm{d}y$, ce qui montre le point (b). avec $g = \underline{f}$ (qui est dans $L^1(\mathbb{R}^m)$ d'après (i). Le point (c) suit directement le (ii).*

On suppose maintenant (E'). Choisissons une fonction qui satisfait (b). Notons, N_1 l'ensemble des x tels que $y \mapsto f(x,y)$ ne soit pas dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et N_2 l'ensemble x tels que $\int f(x,y)\mathrm{d}y \neq g(y)$.

Pour $x \notin N_1$, on a $\overline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \int f(x,y)\mathrm{d}y$.

Pour $x \notin (N_1 \cup N_2)$, $\overline{f}(x) = \overline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{f}(x) = g(x)$. Or g est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, donc $\overline{f}$ et $\underline{f}$ le sont aussi ce qui montre (i). De plus, comme g, $\overline{f}$ et $\underline{f}$ sont égale p.p., on a $\int \overline{f} = \int \underline{f} = \int g$ et d'après (c), on en déduit $\int \overline{f} = \int \underline{f} = \int f$ ce qui donne (ii).