Théorie de la mesure et intégration — UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Printemps 2020 — SECTION DE MATHÉMATIQUES

Série 12 – Correction (corrigée le 20/05/2020)

Exercice 1. Soient $0 < a < b$ deux réels strictement positifs. En considèrant l'intégrale

$$\int_{[a,b]} \int_{[0,1]} x^y \mathrm{d}\lambda_1(x) \mathrm{d}\lambda_1(y),$$

montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} \mathrm{d}\lambda_1(x) = \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

Correction : *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,1]\times[a,b] & \to & \mathbb{R}_{\leq 0} \\ & (x,y) & \mapsto & x^y = \begin{cases} \exp(y\log x) & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$

est continue sur $[0,1]\times[a,b]$ donc Riemann intégrable donc Lebesgue intégrable et donc d'après le Théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(x)\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_{[0,1]} \int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(y)\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_{[0,1]\times[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}(\lambda_1\times\lambda_1)(x,y) \\ &= \int_{[0,1]\times[a,b]} f\mathrm{d}\lambda_2. \end{aligned}$$

Fixons $x\in[0,1]$. Si $x=0$, on a

$$\int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{[a,b]} 0\mathrm{d}\lambda_1(y) = 0$$

Sinon, on a

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_{[a,b]} \exp(y\log(x))\mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= (R)\int_{[a,b]} \exp(y\log(x))\mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \left[\frac{\exp(y\log(x))}{\log x}\right]_{y=a}^{y=b} \\ &= \frac{\exp(b\log(x))}{\log(x)} - \frac{\exp(a\log(x))}{\log(x)} = \frac{x^b - x^a}{\log(x)}. \end{aligned}$$

On note au passage que comme prévu, cette quantité est bien positive.

On intègre maintenant dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(x) = (R)\int_{[0,1]} x^y \mathrm{d}x & \\ &= \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{y+1} =: g(y). \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} \mathrm{d}\lambda_1(x) &= \int_a^b g(y)\mathrm{d}\lambda_1(y)\\ &= (\mathrm{R})\int_a^b g(y)\mathrm{d}y\\ &= [\log(1+y)]_{y=a}^{y=b}\\ &= \log(1+b) - \log(1+a)\\ &= \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).\end{aligned}$$

Exercice 2. On considère l'espace mesurable $[0,1]$ muni de la tribu borélienne, la mesure de Lebesgue λ_1 et la mesure de comptage δ sur cet espace.

(1) Montrer que $\lambda_1 \ll \delta$.

Correction : *La seule partie X de $[0,1]$ pour laquelle $\delta(X) = 0$ est la partie vide. Or pour toute mesure μ, $\mu(\emptyset) = 0$. Ainsi, pour toute mesure μ, $\mu \ll \delta$. En particulier, $\lambda_1 \ll \delta$.*

(2) Montrer que λ_1 ne peux pas s'écrire sous la forme $f\delta$.

Correction : *Supposons qu'il existe une telle fonction f. Fixons $x \in [0,1]$, on a*

$$0 = \lambda_1(\{x\}) = \int_{[0,1]} \chi_{\{x\}}(t)f(t)\mathrm{d}\delta(t) = f(x)\int_{[0,1]} \chi_{\{x\}}(t)\mathrm{d}\delta(t) = f(x)\delta(\{x\}) = f(x).$$

Ainsi f est la fonction nulle. Mais alors on a :

$$1 = \lambda_1([0;1]) = \int_{[0;1]} \chi_{[0;1]}(t)f(t)\mathrm{d}\delta(t) = \int_{[0;1]} 0\mathrm{d}\delta(t) = 0.$$

ce qui est absurde, donc une telle fonction f n'existe pas.

Exercice 3. Soient ν une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{A}^\omega$. Montrer les assertions suivantes.

(1) Si la suite $(A_n)_{n\in\omega}$ est croissante, alors la suite $(\nu(A_k))_{k\in\omega}$ converge vers la valeur $\nu\left(\bigcup_{k\in\omega} A_k\right)$.

Correction : *Pour $k \in \omega$, notons $a_k = \nu(A_k)$. On pose $B_0 = A_0$ et pour $k \in \omega_{\geq 1}$, on note $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ et $b_k = \nu(B_k)$. Pour tout $n \in \omega_{\geq 1}$, on a $A_{n-1} = \bigcup_{k\in n} A_k = \bigsqcup_{k\in n} B_k$. On en déduit que pour tout $n \in \omega$,*

$a_n = \sum_{k\in n+1} b_k$ et que, par définition des mesures signées, on a

$$\nu\left(\bigsqcup_{k\in\omega} B_k\right) = \sum_{k\in\omega} b_k,$$

où la somme converge absolument. En particulier, la somme est bien définie et $\sum_{k\in\omega} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in n+1} b_k = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(2) Si la suite $(A_n)_{n\in\omega}$ est décroissante et $\nu(A_0) \in \mathbb{R}$, alors la suite $(\nu(A_k))_{k\in\omega}$ converge vers la valeur $\nu\left(\bigcap_{k\in\omega} A_k\right)$.

Correction : *Pour tout $n \in \omega$, on note $B_n = A_0 \setminus A_n$. Pour tout $n \in \omega$, on a $B_n \subseteq B_{n+1}$, d'après la question précédente,*

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \lim_{n\to\infty} (\nu(A_0) - \nu(A_n)).$$

Comme $\nu(A_0) \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$ existe et que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) &= \nu(A_0) - \nu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) \\
&= \nu(A_0) - \nu\left(\bigcup_{n\in\omega} (A_0 \setminus A_n)\right) \\
&= \nu(A_0) - \nu\left(A_0 \setminus \left(\bigcap_{n\in\omega} \setminus A_n\right)\right) \\
&= \nu\left(\bigcap_{n\in\omega} A_n\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4. On considère $(D_n)_{n\in\omega}$ une suite de disques fermés inclus dans D le disque unité fermé et deux à deux disjoints. Pour $n \in \omega$, on note r_n le rayon de D_n et on suppose que pour tout $n \in \omega$, $r_n > 0$. Le but de cet exercice est de montrer que si $\lambda_2\left(D \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} D_n\right)\right) = 0$ alors $\sum_{n\in\omega} r_n = +\infty$. Supposons, que $\sum_{n\in\omega} r_n < +\infty$.

(1) Pour $n \in \omega$, posons I_n la projection de D_n sur l'axe des abscisses. Montrer que pour presque tout $x \in [-1,1]$, l'ensemble $\{n \in \omega | x \in I_n\}$ est fini.

Correction : *Pour tout $n \in \omega$, on a $\lambda_1(I_n) = 2r_n$. Considérons, la fonction mesurable et positive $f = \sum_{k\in\omega} I_k$. Notons que $f(x)$ est le cardinale de l'ensemble $\{n \in \omega | x \in I_n\}$. D'après le théorème de convergence monotone, on a*

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,1]} f \mathrm{d}\lambda_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} \left(\sum_{k\in\omega} I_k\right) \mathrm{d}\lambda_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\omega} \int_{[-1,1]} I_k \mathrm{d}\lambda_1 \\
&= \sum_{k\in\omega} 2r_k < +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $N = f^{-1}(\{+\infty\})$ est de mesure nulle et donc pour presque tout x de $[-1,1]$, l'ensemble $\{n \in \omega | x \in I_n\}$ est fini.

(2) Pour $x \in [0,1]$, on note L_x la droite verticale passant par $(x,0)$. Montrer que pour presque tout $x \in [0,1]$,

$$\lambda_1\left(L_x \cap \left(D \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} D_n\right)\right)\right) > 0.$$

Correction : *Notons $N' = N \cup \{-1,1\}$, c'est toujours un ensemble négligeable. Soit $x \in (-1,1) \setminus N'$. L'ensemble $L_x \cap D$ disons $[a,b]$ est un intervalle fermé d'intérieure non vide. En particulier il est connexe. L'ensemble $L_x \cap \bigcup_{n\in\omega} D_n$ est une union finite disjointe d'intervalles fermés. Son complémentaire est donc un ouvert de $[a,b]$. Montrons que cet ouvert est non vide. En effet si il était vide, par connexité, il existerait un $n \in \omega$ (unique) pour lequel $L_x \cap D = L_x \cap D_n$. En faisant un dessin on se convainc facilement qu'alors $D_n = D$ ce qui est absurde car les disque D_n sont supposés disjoints et de rayon non nul.*

Ainsi cet ensemble est un ouvert de $[a,b]$ non vide, il a donc mesure strictement positive.

(3) Conclure.

Correction : *On montre la contraposée de l'énoncé proposé : On sippoer comme dans les question précédente $\sum_{n\in\omega} r_n < +\infty$. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}_{\leq 0}$ égale à*

$$\chi_D - \sum_{n\in\omega} \chi_{D_n} = \chi_{D \setminus \bigcup_{n\in\omega} D_n}.$$

La fonction f est $\mathcal{A}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\lambda_1}$-mesurable (car χ_D et chaque χ_{D_n} est $\mathcal{A}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\lambda_1}$-mesurable, car chaque disque est $\mathcal{A}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\lambda_1}$-mesurable, pourquoi ?) et λ_2 est un prolongement de $\lambda_1 \times \lambda_1$, donc

$$\int_D f \mathrm{d}(\lambda_1 \times \lambda_1) = \int_D f \mathrm{d}\lambda_2 = 0$$

Ainsi, f est dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda_1 \times \lambda_1)$, on peut donc appliquer le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_2\left(D \setminus \bigcup_{n \in \omega} D_n\right) &= \int_D f \mathrm{d}(\lambda_1 \times \lambda_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathrm{d}\lambda_1(y) \lambda_1(x) \\
&= \int_R \lambda_1\left(L_x \cap \left(D \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} D_n\right)\right)\right) \mathrm{d}\lambda_1(x) > 0,
\end{aligned}$$

d'après la question précédente. On a bien montré la contraposée.