Série 13 – Correction (corrigée le 27/05/2020)

Exercice 1. Pour $j = 1, 2$, soient μ_j et ν_j deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(X_j, \mathcal{A}_j)$ telles que $\nu_j \ll \mu_j$. Montrer que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ et que

$$\frac{\mathrm{d}(\nu_1 \times \nu_2)}{\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2).$$

Correction :

La fonction $f : (x_1, x_2) \mapsto \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2)$ est mesurables et à valeurs positive. Elle définit donc une mesure μ_f sur $X_1 \times X_2$. On va montrer que $\mu_f = \nu_1 \times \nu_2$. D'après le cours ce sont toutes les deux des mesures sur $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et $\mu_1 \times \mu_2$ est σ-finie. Le théorème d'unicité (corollaire 7) implique qu'il suffit de vérifier que $\mu_f = \nu_1 \times \nu_2$ sur l'algèbre des unions disjointes finies de pavés mesurables. Par additivité des mesures il suffit donc de le vérifier pour les pavés.

Pour $j = 1, 2$, notons $f_j = \frac{\mathrm{d}\nu_j}{\mathrm{d}\mu_j} \colon X_j \to \mathbb{R}$ et fixons $A_j \in \mathcal{A}_j$ tels que $\mu_j(A_j)$

Les fonctions $\chi_{A_1 \times A_2}$ et $((x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1)f_2(x_2))$ mesurables (pour la tribu produit) à valeurs positives. On peut donc appliquer le théorème de Tonelli (2 fois) :

$$\begin{aligned}
(\nu_1 \times \nu_2)(A_1 \times A_2) &= \int \chi_{A_1 \times A_2} \mathrm{d}(\nu_1 \times \nu_2) \\
&= \int \chi_{A_1} \int \chi_{A_2} \mathrm{d}\nu_2 \mathrm{d}\nu_1 \\
&= \int f_1 \chi_{A_1} \int \chi_{A_2} f_2 \mathrm{d}\mu_2 \mathrm{d}\mu_1 \\
&= \int f_1 f_2 \chi_{A_1 \times A_2} \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) \\
&= \mu_f(A_1 \times A_2).
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soient μ_1, μ_2, ν trois mesures signées sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ telles que $\mu_1 \perp \nu$, $\mu_1 \perp \nu$ et la somme $\mu_1 + \mu_2$ est bien définie. Montrer que $(\mu_1 + \mu_2) \perp \nu$.

Correction : *Quit à considérer $-\mu_1$ (et $-\mu_2$ du coup), on peut supposer que μ est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ainsi, $\mu_1 + \mu_2$ est bien définie si μ_2 est elle aussi à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

Il faut se rappeler que la notion de négligeabilité nécessite est un peu plus contraignante à écrire dans le cas des mesures signées.

Pour $j = 1, 2$ comme $\mu_j \perp \nu$, il existe N_j tel que

$$\mu_{j\,|\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N_j)} = 0 \text{ et } \nu_{|\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N_j^c)} = 0$$

Soit $N = N_1 \cap N_2$. Ainsi $(\mu_1 + \mu_2)$ se restreint à 0 sur $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N) = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N_1) \cap \mathcal{P}(N_1)$

De plus, si $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N^c)$, on a $A \subseteq (N_1^c \cup N_2^c)$, donc $A = (A \cap N_1^c) \sqcup (A \cap (N_2^c \setminus N_1^c))$ donc $\nu(A) = \nu(A \cap N_1^c) + \nu(A \cap (N_2^c \setminus N_1^c)) = 0 + 0$. Ainsi $(\mu_1 + \mu_2) \perp \nu$.

Notons que la preuve s'adapte sans problème aux sommes dénombrables de mesures singulières $(\mu_n)_{n \in \omega}$ par rapport à une même mesure ν.

Exercice 3. Soient μ une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, $Y \in \mathcal{A}$ et ν une mesure signée sur $(Y, \mathcal{A}(Y))$ singulière par rapport à $\mu_{|\mathcal{A}(Y)}$. Montrer que la mesure $\tilde{\nu}$ sur $(X, \mathcal{A})$ définie par $\tilde{\nu}(A) = \nu(A \cap Y)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ est singulière par rapport à μ.

Correction : *On se donne $N \in \mathcal{A}(Y)$ tel que $\nu_{|\mathcal{A}(N)} = 0$ et $\left(\mu_{|\mathcal{A}(Y)}\right)_{|\mathcal{A}(Y \setminus N)} \mu_{|\mathcal{A}(Y \setminus N)} = 0$.*

On pose $N' = N \sqcup X \setminus Y$. Soit $A \in \mathcal{A}(N')$. On a $A = (A \cap N) \sqcup (A \cap (X \setminus Y))$, on a

$$\tilde{\nu}(A) = \nu(Y \cap A) = \nu(Y \cap N \cap A) + \nu(Y \cap A \cap (X \setminus Y)) = \nu(N \cap (Y \cap A)) + \nu(\emptyset) = 0 + 0,$$

donc $\tilde{\nu}_{|\mathcal{A}(N')} = 0$ et donc N' est ν-négligeable. D'autre part, si $A \in \mathcal{A}(X \setminus N')$, on a $A \in \mathcal{A}(Y \setminus N)$, donc :

$$\mu(A) = \mu_{|\mathcal{A}(Y)} = 0.$$

Ainsi $X \setminus N'$ est μ-négligeable, donc $\tilde{\nu}$ est singulière par rapport à ν.

Exercice 4. Soient $X = (X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(X; \overline{\mathbb{R}})$ une fonction semi-intégrable. Montrer que $(\mu_f)^{\pm} = \mu_{f^{\pm}}$ et $|\mu_f| = \mu_{|f|}$.

Correction : *Pour tout A mesurable, on a :*

$$\mu_f(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A (f^+ - f^-) \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ - \int_A f^- \mathrm{d}\mu = \mu_{f^+}(A) - \mu_{f^-}(A).$$

Or μ_{f^+} et μ_{f^-} sont des mesures (non signées) et singulière entre elle (il suffit d'écrire $X = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{>0})) \sqcup f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0})$. Donc par l'unicité de la décomposition de Jordan, on a : $\mu_f^+ = \mu_{f^+}$ et $\mu_f^- = \mu_{f^-}$.

Exercice 5. Soit ν une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ avec sa décomposition de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Montrer que $E \in \mathcal{A}$ est ν-négligeable si et seulement si $|\nu|(E) = 0$.

Correction : *Soit E tel que $|\nu|(E) = 0$. On a dont $\nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$ donc par positivité des mesures, $\nu^+(E) = \nu^-(E) = 0$ et donc E est ν^+ et ν^--négligeable, et donc, comme $\nu = \nu^+ - \nu^-$, est E ν-négligeable. En effet, si $A \in \mathcal{A}(E)$, $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) = 0 - 0 = 0$.*

Réciproquement, supposons E ν-négligeable. Comme ν^+ et ν^- sont singulières entre elles, on peut se donner P et N tels que P est ν^--négligeable et N est ν^+-négligeable et tel que $X = P \sqcup N$.

On a $\nu(E \cap P) = \nu^+(E \cap P) - \nu^-(E \cap P) = \nu^+(E \cap P) - 0$, donc $\nu^+(E \cap P) = 0$, or comme par définition de N, $\nu^+(E \cap N) = 0$, on obtient finalement, $\nu^+(E) = \nu^+(E \cap P) + \nu^-(E \cap N) = 0 + 0$. De même, $\nu^-(E) = 0$ et donc $|\nu|(E) = 0$.