Série 2 – Correction (corrigée le 04/03/2020)

Exercice 1. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'on peut recouvrir $\mathbb{Q}$ par une union infinie d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est inférieure strictement à ϵ.

Correction : *On fixe $\epsilon > 0$ et une bijection $\varphi\colon \omega \to \mathbb{Q}$. On considère*

$$W = \bigcup_{n\in\omega} \left]\varphi(n) - \frac{\epsilon}{4^{n+1}}, \varphi(n) + \frac{\epsilon}{4^{n+1}}\right[.$$

L'ensemble W est bien une union d'intervalles ouverts et contient $\mathbb{Q}$. La somme des longueurs des intervalles est

$$2\epsilon \sum_{n\in\omega} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{2\epsilon}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Exercice 2. Soit X un ensemble et $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ valant 0 sur l'ensemble vide et 1 sur tout autre partie de X.

(1) Montrer que φ est une mesure extérieure.

Correction : *On a bien $\varphi(\emptyset) = 0$, pour montrer que φ est une mesure extérieure, il suffit de montrer qu'elle est croissante et qu'elle satisfait la propriété de σ-sous-additivité. La croissance est triviale. Pour la σ-sous-additivité, on se donne $A_n \in \mathcal{P}(X)^\omega$. De deux choses l'une : soit tous les A_n sont vides auquel cas, $\bigcup_{n\in\omega} A_n = \emptyset$. On a alors*

$$0 = \varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n) = \sum_{n\in\omega} 0 = 0$$

et donc $\varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$. Sinon l'un des A_n est non-vide, disons A_{n_0} et alors :

$$1 = \varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \varphi(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$$

et donc $\varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega}$.

(2) Est-ce que φ est une mesure ?

Correction : *La fonction φ est une mesure si et seulement si X a au plus un élément. En effet dans ce cas, c'est une conséquence de l'exercice 4 de la série 1. Si X a au moins 2 éléments, disons x et y, on a : $\{x, y\} = \{x\} \sqcup \{y\}$, mais*

$$1 = \varphi(\{x, y\}) \neq \varphi(\{x\}) + \varphi(\{y\}) = 1 + 1 = 2.$$

(3) Quels sont les ensembles φ-mesurables ?

Correction : *Les seules ensembles φ-mesurables sont X et l'ensemble vide. Montrons le ! Pour toute partie B de X, on a*

$$\varphi(B \setminus \emptyset) + \varphi(B \cap \emptyset) = \varphi(B) + \varphi(\emptyset) = \varphi(B) \quad \text{et}$$
$$\varphi(B \setminus X) + \varphi(B \cap X) = \varphi(\emptyset) + \varphi(B) = \varphi(B).$$

Donc X et $\emptyset$ sont φ-mesurable. Supposons maintenant que A ne soit ni X ni $\emptyset$. On peut donc trouver $x \in A$ et $y \in A^c$. On considère $B = \{x, y\}$. On a

$$\varphi(B \setminus A) + \varphi(B \cap A) = \varphi(\{y\}) + \varphi(\{x\}) = 2 \neq \varphi(B).$$

et donc A n'est pas mesurable.

Exercice 3. Soit $\varphi\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0;+\infty]$ valant 0 sur les parties bornées de $\mathbb{R}^n$ et $+\infty$ sur les autres. Est-ce que φ est une mesure extérieure ?

Correction : *Non, ce n'est pas une mesure extérieur car cette fonction ne satisfait pas la σ-sous-additivité. On commence par munir $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Pour $k \in \omega$, on considère $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq k\}$. Chacun de ses ensembles est borné et leur union est $\mathbb{R}^n$ tout entier, on a donc*

$$\infty = \varphi\left(\bigcup_{k\in\omega} B_k\right) \not\leq \sum_{k\in\omega} \varphi(B_k) = 0.$$

Exercice 4. Soit X un ensemble et $\{\varphi_i\colon \mathcal{P}(X) \to [0;+\infty]\}_{i\in I}$ un ensemble de mesures extérieures sur X.

(1) Montrer que $\psi := \sup_{i\in I} \varphi_i$ est une mesure extérieure sur X.

Correction : *On a bien $\psi(\emptyset) = 0$. Soient $A \subseteq B$ deux parties de X, on a pour tout $i \in I$, $\varphi_i(A) \leq \varphi_i(B) \leq \psi(B)$, donc $\psi(A) \leq \psi(B)$. Montrons maintenant la σ-sous-additivité. Soient $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{P}(X)^\omega$. Pour tout i, on a :*

$$\psi_i\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \psi_i(A_n) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n),$$

Donc $\varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$. Et donc φ est bien une mesure extérieure.

(2) Montrer que $\rho := \inf_{i\in I} \varphi_i$ est croissante pour l'inclusion.

Correction : *Soient $A \subseteq B$ deux parties de X, on a pour tout $i \in I$, $\rho(A) \leq \varphi_i(A) \leq \varphi_i(B)$, donc, $\rho(A) \leq \rho(B)$.*

(3) Dans le cas particulier $X = \omega$, $I = \omega$, et

$$\varphi_i(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ \dfrac{1}{i+1} & \text{si } A \text{ est fini non vide,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini,} \end{cases}$$

montrer que φ_i est une mesure extérieure pour tout $i \in \omega$ mais $\rho := \inf_{i\in I} \varphi_i$ n'est pas une mesure extérieure.

Correction : *On fixe un $i \in \omega$, $\varphi_i(\emptyset) = 0$ et φ_i est clairement croissante pour l'inclusion. Montrons qu'elle aussi σ-sous-additive. Soient $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{P}(X)^\omega$. On distingue trois cas : l'ensemble $A := \bigcup_{n\in\omega} A_n$ est soit vide, soit fini non vide soit infini.*

— *Si A est vide et tous les A_n sont vide et alors :*

$$\varphi_i(A) = 0 = \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n).$$

— *Si A est fini non vide, au moins l'un des A_n, disons A_{n_0}, est fini non-vide. On a alors :*

$$\varphi_i(A) = \frac{1}{i+1} = \varphi_i(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n).$$

— *Enfin, si A est infini, soit il existe n_0 tel que A_{n_0} est infini et alors :*

$$\varphi_i(A) = +\infty = \varphi_i(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n),$$

soit il existe une infinité dénombrable d'entier n tel que A_n est non-vide, notons ces indices $(n_k)_{k\in\omega}$. On a alors :

$$\sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n) \geq \sum_{k\in\omega} \varphi_i(A_{n_k}) = \sum_{k\in\omega} \frac{1}{i+1} = +\infty = \varphi_i(A).$$

Ainsi dans tous les cas, on a bien $\varphi_i(A) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n)$ et donc φ_i est σ-sous-additive.

Montrons maintenant que ρ n'est pas une mesure extérieure. Pour $n \in \omega$, on pose $A_n = \{n\}$. Pour tout $n \in \omega$, on a $\rho(A_n) = \inf_{i\in I} \varphi_i(A_n) = \inf_{i\in I} \frac{1}{i+1} = 0$ et $\rho(\omega) = \inf_{i\in I} \varphi_i(\omega) = \inf_{i\in I} +\infty = +\infty$. Ainsi

$$+\infty = \rho\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \not\leq \sum_{n\in\omega} \rho(A_n) = 0.$$

Et ainsi ρ n'est pas une mesure extérieure.

Exercice 5. Soit $d \in \omega\backslash\{0\}$ fixé. On rappelle que si $B \subset \mathbb{R}^d$, son *diamètre* est $\operatorname{diam}(B) := \sup_{a,b\in B} \|a-b\|$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $s \in [0, +\infty]$ et $\delta \in]0, +\infty]$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{R}_\delta(A)$ l'ensemble des recouvrements au plus dénombrables de A par des parties ouvertes de $\mathbb{R}^d$ de diamètre inférieur à δ.

On définit alors la *mesure extérieure de Hausdorff de dimension s et de pas δ* par

$$H^s_\delta(A) := \inf_{(F_i)_{i\in I}\in\mathcal{R}_\delta(A)} \sum_{i\in I} (\operatorname{diam}(F_i))^s$$

pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$.

(1) Montrer que H^s_δ est bien une mesure extérieure.

Correction : *On a bien $H^s_\delta(\emptyset) = 0$ car on peut recouvrir $\emptyset$ par le recouvrement vide $(F_i)_{i\in\emptyset}$. La fonction H^s_δ est croissante pour l'inclusion car si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^d$, tout recouvrement de B est un recouvrement de A et donc $H^s_\delta(A) \leq H^s_\delta(B)$. Montrons que H^s_δ est σ-sous-additive.*

Soit $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Pour chaque n on choisit $(F^n_i)_{i\in I_n} \in \mathcal{R}_\delta(A_n)$. La réunion $(F_i)_{i\in I}$ des F^n est un recouvrement de la réunion des A_n. On a donc :

$$H^s_\delta\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{k\in I} (\operatorname{diam}(F_k))^s = \sum_{n\in\omega}\sum_{i\in I_n} (\operatorname{diam}(F^n_i))^s.$$

Comme le terme de gauche ne dépend pas des F^n, on a bien

$$H^s_\delta\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} H^s_\delta(A_n).$$

Ainsi H^s_δ est bien une mesure extérieure.

On peut aussi utiliser la Proposition 3 du cours avec la fonction ρ: $\mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \operatorname{diam}(A)^s$, restreinte aux ensembles de diamètre inférieur à δ.

(2) Montrer que

$$\forall s \geq 0,\ \forall A \subset \mathbb{R}^d,\ \forall \delta, \epsilon > 0, \quad \delta < \epsilon \Longrightarrow H^s_\delta(A) \geq H^s_\epsilon(A).$$

Correction : *On fixe $s \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ et $\epsilon > \delta$. Soit $(F_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_\delta(A)$, chacun des éléments de F a un diamètre plus petit que δ, donc que ϵ, donc $F \in \mathcal{R}_\epsilon(A)$, ainsi :*

$$H^s_\epsilon(A) \leq \sum_{i\in I} (\operatorname{diam}(F_n))^s.$$

Comme le terme de gauche ne dépend pas de F, on a bien, en prenant l'infimum sur les $F \in \mathcal{R}_\delta(A)$:

$$H^s_\epsilon(A) \leq H^s_\delta(A).$$

(3) En déduire (en se servant de l'exercice précédent) que H^s, la fonction sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$H^s(A) := \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} H^s_\delta(A),$$

est bien définie et que c'est une mesure extérieure. On l'appelle la *mesure extérieure de Hausdorff de dimension s.*

Correction : *La question précédente nous dit que pour tout A et tout s, la fonction $]0,+\infty[\ni \delta \mapsto H^s_\delta(A)$ est décroissante ceci implique (voir le lemme à la fin) non seulement que*

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} H^s_\delta(A)$$

est bien définie (dans $\bar{\mathbb{R}}_+$), mais aussi que

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} H^s_\delta(A) = \sup_{\delta\in]0,+\infty[} H^s_\delta(A).$$

L'exercice précédent nous assure alors que H^s est une mesure extérieure.

Lemme. Soit $f\colon\ ]0,+\infty[\to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ une fonction décroissante. Alors

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \sup\{f(x)\,|x\in]0,+\infty[\} = \sup f.$$

Démonstration. De deux choses l'une : soit f est bornée, soit f est non-bornée.

Si f est non bornée, par définition, $\sup f = +\infty$. Montrons que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Soit $M > 0$, il existe $x_0 \in]0,+\infty[$, tel que $f(x_0) > M$. Comme f est décroissante, pour tout $x\in]0,+\infty[$ tel que $|x-0| < x_0$, $f(x) > M$, et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Si f est bornée, alors par définition, $\ell := \sup f$ est fini. Montrons que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \ell$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $x_0 \in]0,+\infty[$, tel que $f(x_0) > \ell-\epsilon$. Comme f est décroissante, pour tout $x\in]0,+\infty[$ tel que $|x-0| < x_0$, $\ell < f(x) < f(x_0)\ell-\epsilon$, et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \ell$. □

(4) Pour $s = 0$, montrer que H^0 coïncide avec la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Correction : *Supposons que $X \subseteq \mathbb{R}^d$ est fini et notons $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ses éléments et $\epsilon = \min_{1\leq i<j\leq n} ||x_i - x_j||$. Pour tout δ, la collection $\{x_1\},\ldots,\{x_n\}$ est un recouvrement dans $\mathcal{R}_\delta(X)$, ceci montre que $H^0_\delta(X) \leq n$ pour tout δ. Pour $\delta < \epsilon$, si $F\in\mathcal{R}_\delta$, tout ensemble de F contient au plus un élément de X, donc F est constitué d'au moins n partie de $\mathbb{R}^d$ et donc $H^0_\delta(X) \geq n$. Ceci montre que pour δ suffisament petit $H^0_\delta(X) = n$ et donc que $H^0(X) = n$.*

Si X est un ensemble infini, il contient des ensembles finis avec un nombre arbitrairement grand d'éléments. Par croissance de H^0, on a $H^0(X) \geq n$ pour tout $n\in\omega$ et donc $H^0(X) = +\infty$. C'est donc bien la mesure de comptage sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 6. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et φ_μ la mesure extérieure définie par

$$\varphi_\mu(B) = \inf\{\mu(A)\mid A\in\mathcal{A},\ B\subset A\},\quad \forall B\in\mathcal{P}(X).$$

Montrer que tout élément de la tribu $\mathcal{A}$ est φ_μ-mesurable.

Correction : *Par construction, φ_μ est une mesure extérieure. On a donc pour tout $A,B\in\mathcal{P}(X)$:*

$$\varphi_\mu(B) \leq \varphi_\mu(A\cap B) + \varphi_\mu(B\setminus A).$$

Il suffit donc de montrer que tout $A \in mathcal A$ et tout B in $\mathcal{P}(X)$,

$$\varphi_\mu(B) \geq \varphi_\mu(A\cap B) + \varphi_\mu(B\setminus A).$$

Soit $C\in\mathcal{A}$ tel que $B\subseteq C$. L'ensemble $A\cap C$ est dans $\mathcal{A}$ et $A\cap B\subseteq A\cap C$, donc $\varphi_\mu(A\cap B)\leq\mu(A\cap C)$. De même, $C\setminus A\in\mathcal{A}$ et $B\setminus A\subseteq C\setminus A$, donc $\varphi_\mu(B\setminus A)\leq\mu(C\setminus A)$.

De plus comme μ est une mesure, $\mu(C) = \mu(C\cap A)+\mu(C\setminus A)$. ainsi $\mu(c)\geq\varphi_\mu(A\cap B)+\varphi_\mu(B\setminus A)$. Comme le terme de droite ne dépend pas de C, on a

$$\varphi_\mu(B) \geq \varphi_\mu(A\cap B) + \varphi_\mu(B\setminus A).$$