Série 3 – Correction (corrigée le 11/03/2020)

Exercice 1. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x<0, \\ 0 & \text{si } x=0, \\ x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

et la famille $\mathcal{F} = \{]a,b[| a \leq b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(1) Justifier qu'on peut constuire une mesure extérieure μ sur $\mathbb{R}$ à partir de

$$\begin{array}{rrcl} \rho_f : & \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ & \emptyset & \mapsto & 0 \\ &]a,b[& \mapsto & f(b)-f(a). \end{array}$$

Correction : *La famille $\mathcal{F}$ contient le vide et la fonction ρ_f est positive. Ainsi, d'après la Proposition 3 du cours, on peut induire une mesure extérieur sur $\mathbb{R}$ en définissant pour tout $X \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\mu(X) = \inf_{(Y_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_F(X)} \sum_{i\in I} \rho_f(Y_i).$$

(2) Calculer $\mu(]0,1]), \mu([0,1]), \mu(\{0\}), \mu([-1,0[)$ et $\mu([-1,0])$.

Correction :

— *Montrons que $\mu(]0,1]) = 1$.*
Soit $\epsilon > 0$. On considère $(X_n^\epsilon)_{n\in\omega}$ avec $X_n^\epsilon = \left]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} + \frac{\epsilon}{2^n}\right[$. La famille $(X_n^\epsilon)_{n\in\omega}$ est bien un recouvrement de $]0,1]$. D'autre part,

$$\sum_{n\in\omega} \rho_f(X_n^\epsilon) = \sum_{n\in\omega} \frac{1}{n+1} + \frac{\epsilon}{2^n} - \frac{1}{n+1} = 1 + 2\epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϵ on a $\mu(]0,1]) \leq 1$.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de $]0,1]$ par des intervalles ouverts. Soit $\epsilon > 0$, $(X_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $[\epsilon, 1]$ par des intervalles ouverts. Comme $[\epsilon,1]$ est compacte on peut en extraire un sous recouvrement fini $(X_i)_{i\in J}$. On considère la fonction $f_\epsilon = \sum_{i\in J} \chi_{X_i}$. C'est une somme finie de fonctions localement Riemann-intégrable, elle est donc localement Riemann-intégrable. De plus, on a $f_\epsilon \geq \chi_{[\epsilon,1]}$. Or pour tout $i \in J$, on a $\rho(X_j) \geq \int_\epsilon^1 \chi_{X_j}$. Ainsi, on a :

$$\sum_{i\in I} \rho_f(X_i) \geq \sum_{i\in J} \rho_f(X_i) \geq \int_\epsilon^1 \sum_{i\in J} \chi_{X_j} \geq \int_\epsilon^1 \chi_{[\epsilon,1]} = 1 - \epsilon.$$

Ceci montre que $\mu(]0,1]) \geq 1-\epsilon$ et comme ϵ était quelconque, on $\mu(]0,1]) \geq 1$ et finalement $\mu(]0,1]) = 1$.

— *Montrons que $\mu(\{0\}) = 2$.*
Soit $\epsilon > 0$, on peut recouvrir $\{0\}$ avec l'intervalle $\left]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right]$, on a $\rho_f\left(\left]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right]\right) = 2 + 2\epsilon$, donc $\mu(\{0\}) \leq 2 + 2\epsilon$. Comme ceci est vrai pour tout ϵ, on a $\mu(\{0\}) \leq 2$.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de $\{0\}$ par des intervalles ouverts. Il existe un $i_0 \in I$ tel que $0 \in X_{i_0}$. Notons $X_{i_0} =]a,b[$ avec $a < b$, on a $\rho_f(X_{i_0}) = 2 + b - a \geq 2$, donc $\mu(\{0\}) \geq 2$ et finalement $\mu(\{0\}) = 2$.

— *Montrons que $\mu([0,1]) = 3$.*
Par sous-additivité de μ, on a $\mu([0,1]) \leq \mu(\{0\}) + \mu(]0,1]) = 3$. On procède un peu comme précédemment. On se donne $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $[0,1]$ par des intervalles ouverts. Par compacité on peut se donner $J \subseteq I$ fini tel que $(X_i)_{i\in J}$ est un recouvrement de $[0,1]$. fini. Pour $i \in I$, si on note $X_i =]a_i, b_i[$, On a :

$$\rho_f(X_i) = \begin{cases} b_i - a_i & \text{si } 0 < a_i \leq b_i, \\ b_i - a_i + 1 & \text{si } 0 = a_i < b_i, \\ b_i - a_i + 2 & \text{si } a_i < 0 < b_i, \\ b_i - a_i + 1 & \text{si } a_i < b_i = 0, \\ b_i - a_i & \text{si } a_i \leq b_i < 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, $\rho_f(X_i) \geq \int_0^1 \chi_{X_i}$ et $\rho_f(X_i) \geq 2 + \int_0^1 \chi_{X_i}$ si $0 \in X_i$. Comme $0 \in [0,1]$, il existe un i_0 tel que $0 \in X_{i_0}$. On a donc

$$\sum_{i\in I} \rho_f(X_i) \geq \sum_{i\in J} \rho_f(X_i) \geq \rho_f(X_{i_0}) \sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \rho_f(X_i) \geq 2 + \sum_{i\in J} \int_0^1 \chi_{X_i} \geq 2 + \sum \int_0^1 \chi_{[0,1]} \geq 3.$$

Ce qui montre que $\mu([0,1]) \geq 3$ et donc que $\mu([0,1]) = 3$.

— *On a $\mu([-1,0[) = 1$ et $\mu([-1,0]) = 3$ et les preuves sont analogues.*

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesuré, $(\mu_i)_{i\in\omega}$ une famille de mesures sur X et $(a_i)_{i\in\omega}$ une suite de réels positifs. Montrer que la fonction $\mu\colon \mathcal{T} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ définie par

$$\mu(A) := \sum_{i\in\omega} a_i \mu_i(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{T}$ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.

Correction : *On a $\mu(\emptyset) = \sum_{i\in\omega} a_i\mu_i(\emptyset) = \sum_{i\in\omega} 0 = 0$. On se donne $A \in \mathcal{T}^\omega$ disjoint. On souhaite montrer que $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\omega}\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$ c'est à dire que :*

$$\sum_{i\in\omega}\sum_{n\in\omega} a_i\mu_i(A_n) = \sum_{n\in\omega}\sum_{i\in\omega} a_i\mu_i(A_n).$$

Ceci est donné par le lemme suivant :

Lemme (Théorème de Fubini discret)**.** Soit $(x_{ij})_{(i,j)\in\omega^2} \in \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ alors :

$$\sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij} = \sum_{j\in\omega}\sum_{i\in\omega} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}.$$

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que $\sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}$.

Soit $X \subset \omega^2$ un ensemble fini. Il existe $I, J \subset \omega$ finis tel que $X \subseteq I \times J$. On a

$$\sum_{(i,j)\in X} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in I\times J} x_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ij} \leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in\omega} x_{ij} \leq \sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij}.$$

Et donc

$$\sum_{(i,j)\in\omega^2} \leq \sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij}.$$

Soient $I \subseteq \omega$ fini et pour et pour tout $i \in I$, $J_i \subseteq \omega$ fini.

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J_i} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}$$

On en déduit :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in\omega} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}$$

Puis que

$$\sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}.$$

□

Exercice 3. Soit $\mathcal{T}$ la famille des intervalles fermés de $I = [0,1]$ et μ la mesure extérieure sur I induite par l'application

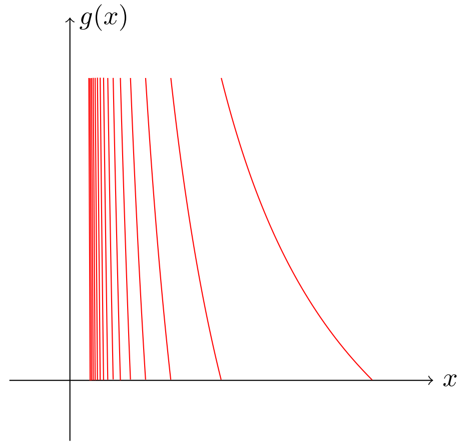
$$\begin{array}{rrcl} \rho\colon & \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ & \emptyset & \mapsto & 0 \\ & [\alpha,\beta] & \mapsto & \ln\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right). \end{array}$$

On s'intéresse à la fonction

$$\begin{array}{rrcl} g\colon & [0,1] & \to & [0,1] \\ & 0 & \mapsto & 0 \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor. \end{array}$$

(1) Tracer le graphe de g.

Correction :



(2) Soit $\alpha \le \beta$, calculer $g^{-1}([\alpha,\beta])$.

Correction : *On a*

$$g^{-1}([\alpha,\beta]) = \bigcup_{n\in\omega} \left[\frac{1}{n+1+\beta}, \frac{1}{n+1+\alpha}\right]$$

En effet si, $x \in \left[\frac{1}{n+1+\beta}, \frac{1}{n+1+\alpha}\right]$, *on a* $\alpha \le g(x) \le \beta$. *Réciproquement, si* $x \in g^{-1}([\alpha,\beta])$, *il existe* $y \in [\alpha,\beta]$ *et* $n \in \omega$ *tel que* $y = \frac{1}{x} - (n+1)$ *et donc* $x \in \left[\frac{1}{n+1+\beta}, \frac{1}{n+1+\alpha}\right]$.

(3) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$.

Correction : *On montre les deux inégalités. Pour* $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$, *on note* $\rho(B) := \sum_{i\in I} \rho(B_i)$. *Soit* $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ *un recouvrement au plus dénombrable de* A. *Pour tout* $i \in I$, $g^{-1}(B_i)$ *est une union dénombrable d'intervalles fermés, en considérant tout ces intervalles fermés pour tous les* $i \in I$, *on obtient un recouvrement au plus dénombrable de* $g^{-1}(A)$ *avec des intervalles fermés. On le note* $g^{-1}(B)$. *Pour* $i \in I$, *on note* $B_i = [\alpha_i, \beta_i]$. *Calculons* $\rho(g^{-1}(B))$:

$$\begin{aligned} \rho(g^{-1}(B)) &= \sum_{i\in I}\sum_{n\in\omega} \rho\left(\left[\frac{1}{n+1+\beta_i}, \frac{1}{n+1+\alpha_i}\right]\right) = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\omega} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n+1+\alpha_i}}{1+\frac{1}{n+1+\beta_i}}\right) \\ &= \sum_{i\in I}\sum_{n\in\omega} \ln\left(\frac{n+1+\beta_i}{n+1+\alpha_i}\right) - \ln\left(\frac{n+2+\beta_i}{n+2+\alpha_i}\right) = \sum_{i\in I} \ln\left(\frac{1+\alpha_i}{1+\beta_i}\right) = \rho(B) \ge \mu(A) \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mu(g^{-1}(A)) \ge \mu(A)$.

L'autre inégalité est nettement plus dur. Soit k *un entier strictement positif. Si* $B \in \mathcal{T}^I$ *est un recouvrement de* $g^{-1}(A)$, *on considère* $B' = (B_i \cap \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right])_{i\in I, n\in\omega} \cup (\{0\}$, *c'est aussi un* *recouvrement de* $g^{-1}(A)$, *on a* $\rho(B) = \rho(B')$. *Comme* $\rho(\{0\})$, *on le laisse de coté. Le recouvrement* B' *peut être vu comme la réunion de recouvrements de* $g^{-1}(A) \cap \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$

Soit $B \in \mathcal{T}^{\omega \times I}$ *tel que pour tout* $n \in \omega$, $B_n = (B_{n,i})_{i \in I}$ *est un recouvrement de* $g^{-1}(A) \cap \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$ *et tel que*

$$\mu(g^{-1}(A)) \leq \rho(B) \leq \mu(g^{-1}(A)) + \frac{1}{k^2}$$

Pour m *in* ω, $B(m) = g^{-1}(g(B_0)) \cap \left[\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}\right]$ *est un recouvrement de* $g^{-1}(A) \cap \left[\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}\right]$, *on a donc* $\rho(B(m)) \geq \rho(B_m) - \frac{1}{k^2}$. *D'autre part* $(B_n)_{n \in k} \cup \left[0, \frac{1}{k}\right]$ *est un recouvrement de* $g^{-1}(A)$, *Donc* $\rho\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right) \geq \sum_{n \geq k} \rho(B_n) - \frac{1}{k^2}$. *Or* $\rho\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right) \leq \frac{1}{k}$, *donc* $\sum_{n \geq k} \rho(B_n) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\rho(B) &= \sum_{n \in \omega} \rho(B_n) \\
&\leq \sum_{n \in k} \rho(B_n) + \sum_{n \geq k} \rho(B_n) \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \sum_{n \in k} \rho(B(n)) + \frac{1}{k^2} \\
&\leq \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} + \sum_{n \in \omega} \rho(B(n)) \\
&\leq \frac{3}{k} + \rho(g(B_0)) \\
&\leq \frac{3}{k} + \mu(A).
\end{aligned}$$

On a donc $\mu(g^{-1}(A)) \leq \frac{3}{k} + \mu(A)$ *pour tout* $k \in \omega_{>0}$, *donc* $\mu(g^{-1}(A)) \leq \mu(A)$ *et finalement :* $\mu(g^{-1}(A)) = \frac{3}{k}$

(4) On admet que pour tout irrationel $x \in]0,1[$ admet un unique développement en fraction continue, c'est à dire qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \omega_{>0}}$ d'entiers strictement positifs telle que :

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Décrire le comportement de g sur les fractions continues.

Correction : *Il s'agit simplement d'un calcul : si* n *est un entier strictement positif et* $y \in]0,1[$, *on a*

$$g\left(\frac{1}{n+y}\right) = n + y - \lfloor n + y \rfloor = y.$$

Ainsi pour g *envoie la fraction continue associée à* $(a_n)_{n \in \omega_{>0}}$ *sur* $(a_{n+1})_{n \in \omega_{>0}}$.