Série 4 – Correction (corrigée le 18/03/2020)

Exercice 1. Soit O un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$, montrer qu'on peut trouver un pavé ouvert rationnel non-vide P tel que $P \subseteq O$.

Correction : *Comme O est non-vide, on peut choisir $x \in O$. Comme O est ouvert, il existe une boule ouverte B de centre x et de rayon $\epsilon > 0$ telle que $B \subseteq O$. Notons $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$ et Pour tout $i \in d$, on a :*

$$x_i - \epsilon' < x_i < x_i + \epsilon'.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver deux rationnels y_i^- et y_i^+ tels que :

$$x_i - \epsilon' < y_i^- < x_i < y_i^+ < x_i + \epsilon'.$$

Soit

$$P =]y_0^-, y_0^+ + [\times]y_1^-, y_1^+ + [\times \cdots]y_{d-1}^-, y_{d-1}^+ + [\times$$

Montrons que $P \subseteq O$. Soit $y \in P$, On a :

$$||x - y||^2 = \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2 < \sum_{i=1}^{d} \epsilon'^2 = \epsilon^2.$$

Ainsi, $||x - y|| < \epsilon$ et donc $y \in B \subseteq O$. Donc $P \subseteq O$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^d$. On définit l'homothétie de centre y et de rapport a comme la fonction

$$\begin{array}{cccc} h & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ & x & \mapsto & a(x-y)+y. \end{array}$$

(1) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, montrer que $\lambda(h(A)) = |a|^d \lambda(A)$.

Correction : *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on rappelle que par définition,*

$$\lambda(A) = \inf_{(R_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)} \left\{ \sum_{i \in I} \mathrm{vol}(R_i) \right\}.$$

Pour $R = (R_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)$, notons $\Psi(R) = \sum_{i\in I} \mathrm{vol}(R_i)$.

On remarque la chose suivante : si P est un pavé ouvert, $h(P)$ l'est aussi et $\mathrm{vol}(h(P)) = |a|^d \mathrm{vol}(P)$. D'autre part, si $R = (R_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)$, $h(R) := (h(R_i))_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(h(A))$ et $\Psi(h(R)) = |a|^d \Psi(R)$.

Enfin l'application h est inversible et son inverse h^{-1} est l'homothétie de centre y et de rapport $\frac{1}{a}$.

Tout ce que l'on vient de dire est donc aussi valable pour h^{-1} (il faut changer a en $\frac{1}{a}$).

Soit $R = (R_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(h(A))$, on a $\Psi(R) = |a|^d \Psi(h^{-1}(R)) \geq |a|^d \lambda(A)$, donc $\lambda(h(A)) \geq |a|^d \lambda(A)$.

Soit $R = (R_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)$, on a $\Psi(R) = \frac{1}{|a|^d} \Psi(h(R)) \geq \frac{1}{|a|^d} \lambda(h(A))$, donc $\lambda(A) \geq \frac{1}{|a|^d} \lambda(h(A))$.

Finalement, $\lambda(h(A)) = |a|^d \lambda(A)$.

(2) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, montrer que A est λ-mesurable si et seulement si $h(A)$ est λ-mesurable.

Correction : *On va utiliser la caractérisation de λ-mesurable de Carathéodory.*

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, supposons A λ-mesurable. Ainsi, pour tout $B \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(B \setminus A).$$

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$ et notons $C' = h^{-1}(C)$. On a :

$$\lambda(C') = \lambda(A \cap C') + \lambda(C' \setminus A).$$

D'après la question précédente, on a :

$$\lambda(h(C')) = \lambda(h(A \cap C')) + \lambda(h(C' \setminus A)).$$

Or on a : $h(A \cap C') = h(A) \cap h(C') = h(A) \cap C$ *et* $h(C' \setminus A) = h(C') \setminus h(A) = C \setminus h(A)$ *(car* h *est bijective), donc :*

$$\lambda(C) = \lambda(h(A) \cap C) + \lambda(C \setminus h(A)).$$

Cette égalité est valide pour tout $C \subseteq \mathbb{R}^d$*, donc* $h(A)$ *est mesurable.*

Pour la réciproque, on applique ce résultat à l'homothétie h^{-1} *et à l'ensemble* $h(A)$*.*