Série 5 – Correction (corrigée le 25/03/2020)

Exercice 1. (1) Soit $f\colon X \to Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur Y. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{A})$, inclus dans $\mathcal{P}(X)$, est une tribu sur X. On l'appelle *tribu image réciproque de $\mathcal{A}$ sous f*.

Correction : *Il faut montrer que la famille $f^{-1}(\mathcal{A})$ contient X, quelle est stable par passage au complémentaire et qu'elle est stable par union dénombrable.*

On a $X = f^{-1}(Y)$ et comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $Y \in \mathcal{A}$, ainsi, $X \in f^{-1}(\mathcal{A})$.

Soit maintenant $B = f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{A})$ avec $A \in \mathcal{A}$, on veut montrer que $B^c = X \setminus B \in f^{-1}(\mathcal{A})$. On a $B^c = f^{-1}(A^c)$ (si ce n'est pas clair, prouvez-le), or $\mathcal{A}$ est une tribu, donc $A^c \in \mathcal{A}$ et donc $B^c \in f^{-1}(\mathcal{A})$.

Soit maintenant $B \in f^{-1}(\mathcal{A})^\omega$. Pour tout $n \in \omega$, on peut trouver $A_n \in \mathcal{A}$ tel que $B_n = f^{-1}(A_n)$. Notons $A' = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ et $B' = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $A' \in \mathcal{A}$. Montrons que

$$B' = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A'),$$

ce qui conclura.

Soit $x \in B'$ fixé quelconque et soit $n \in \omega$ tel que $x \in B_n$. On a $x \in f^{-1}(A_n) \subseteq f^{-1}(A')$. Ainsi $B' \subseteq f^{-1}(A')$. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A')$ fixé quelconque, ce qui signifie que $f(x) \in A'$. Soit $n \in \omega$ tel que $f(x) \in A_n$. Ainsi $x \in B_n \subseteq B'$ et donc $f^{-1}(A') \subseteq B'$ et finalement $f^{-1}(A') = B'$. Finalement, $f^{-1}(A)$ est bien une tribu.

(2) Soit $f\colon X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ inclus dans $\mathcal{P}(Y)$. Montrer que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$.

Correction : *On rappelle que si $\mathcal{F}$ est une famille de partie de Y, $\sigma(\mathcal{F})$ désigne la tribu engendrée par $\mathcal{F}$, c'est à dire la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.*

La tribu $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$ contient la famille $f^{-1}(\mathcal{F})$, donc $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

Pour la réciproque, on considère l'ensemble de partie de Y $\mathcal{A} = \{B \subseteq Y | f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)\}$. Commençons par montrer que c'est une tribu.

- *On a $Y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ car $f^{-1}(Y) = X \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$.*
- *Si $B \in \widetilde{\mathcal{A}}$, on a $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ et comme $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$, $f^{-1}(B)$ aussi. Donc $B^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$.*
- *Soit $B \in \widetilde{\mathcal{A}}^\omega$ on a*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(B_n),$$

et comme pour tout $n \in \omega$, $f^{-1}(B_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$, $\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(B_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$ et donc $\bigcup_{n\in\omega} B_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

On a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. D'autre part, par définition, pour tout $B \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$. Ainsi pour tout $B \in \sigma(\mathcal{F})$, $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$ et donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subseteq \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$ et finalement, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$.

(3) Soit $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une bijection qui envoie tout pavé ouvert de $\mathbb{R}^d$ sur un borélien de $\mathbb{R}^d$. Déduire des questions précédentes que g envoie tout borélien de $\mathbb{R}^d$ sur un borélien de $\mathbb{R}^d$.

Correction : *On applique les questions précédentes à $f := g^{-1}$ en se souvenant que la tribu borélienne est engendrée par les pavés ouverts. En posant $\mathcal{F}$ la famille des pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$. Soit $B \in \mathcal{B}$, on a d'après la question (2) : $f^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$, donc $g(B) = f^{-1}(B)$ est borélien.*

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un ensemble $N \subseteq X$ est μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subseteq A$ et $\mu(A) = 0$. On note $\mathcal{N}_\mu$ la collection de toutes les parties μ-négligeables de X.

(1) Uniquement dans cette question, on suppose que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, ce qui fait de μ également une mesure extérieure. Montrer que la définition des parties négligeables pour une mesure ci-dessus correspond à la définition des parties négligeables pour une mesure extérieure vue dans le cours.

Correction : *On rappelle que si φ est une mesure extérieure, une partie A de X est φ-négligeable si $\varphi(A) = 0$.*

Supposons qu'une partie $N \in \mathcal{A}$ est μ-négligeable(cours). On a $N \subseteq N \in \mathcal{A}$ et $\mu(N) = 0$, donc N est μ-négligeable(exo).

Supposons qu'une partie $N \in \mathcal{A}$ est μ-négligeable(exo). On a $N \subseteq A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$, par croissance de μ (qui est une mesure extérieure), on a $0 \leq \mu(N) \leq \mu(A) = 0$ et donc $\mu(N) = 0$ et N est μ-négligeable(cours).

(2) Montrer que $\mathcal{N}_\mu$ est un anneau d'ensembles.

Correction : *On rappelle qu'une famille non-vide $\mathcal{F}$ est un anneau d'ensemble si*

$$A, B \in \mathcal{F} \Leftarrow (A \cup B \text{ et } A \setminus B \in \mathcal{F}).$$

On a $\mu(\emptyset) = 0$, donc $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$ et donc $\mathcal{N}_\mu \neq \emptyset$.

Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. On se donne A_1 et A_2 tels que $N_i \subseteq A_i$ et $\mu(A_i) = 0$ pour $i = 1, 2$. On a $N_1 \cup N_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ et $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0$. Donc $N_1 \cup N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. D'autre part, $N_1 \setminus N_2 \subseteq A_1$ et donc $N_1 \setminus N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. Ceci montre bien que $\mathcal{N}_\mu$ est bien un anneau d'ensemble.

Notons dès à présent, qu'une réunion dénombrable de négligeable est toujours négligeable.

(3) Montrer que $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \cup N \; ; \; A \in \mathcal{A}, \; N \in \mathcal{N}_\mu\}$ est une tribu.

Correction : *On a bien $X = X \cup \emptyset \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Soit $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ fixé quelconque. Fixons $B, C \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$ tels que :*

$$A = B \cup N, \quad N \subseteq C \quad \text{et} \quad \mu(C) = 0.$$

On a

$$A^c = (B \cup C) = B^c \cap N^c = B^c \cap (N^c \cap (C \cup C^c) = (B^c \cap N^c \cap C^c) \cup (B^c \cap N^c \cap C) = (B^c \cap C^c) \cup (B^c \cap N^c \cap C).$$

La dernière égalité bien du fait que $C^c \subseteq N^c$. Comme B et C sont dans $\mathcal{A}$, $B^c \cap C^c$ est dans $\mathcal{A}$. De plus $B^c \cap N^c \cap C \subseteq C$ et donc $B^c \cap N^c \cap C \in \mathcal{N}_\mu$. Ce qui montre que $A^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Enfin Si $A \in \widetilde{\mathcal{A}}^\omega$, pour tout n, on peut choisir $B_n \in \mathcal{A}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\mu$ tels que $A_n = B_n \cup N_n$. On a

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcup_{n \in \omega} (B_n \cup N_n) = \bigcup_{n \in \omega} B_n \cup \bigcup_{n \in \omega} N_n.$$

Or comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $\bigcup_{n \in \omega} B_n \in \mathcal{A}$ et d'après la remarque faites à la question précédente, $\bigcup_{n \in \omega} N_n \in \mathcal{N}_\mu$. Ainsi, $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$ et finalement $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une tribu.

(4) Montrer que $\widetilde{\mu} \colon \widetilde{\mathcal{A}} \to [0; +\infty], \; A \cup N \mapsto \mu(A)$ (pour $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$) est bien définie et une mesure sur $(X, \widetilde{\mathcal{A}})$. On dit que l'espace mesuré $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ est le *complété* de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Correction : *Montrons tout d'abord que $\widetilde{\mu}$ c'est bien défini. Soit $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ et soit $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$ tels que*

$$A = B_1 \cup N_1 = B_2 \cup N_2.$$

On veut montrer que $\widetilde{\mu}(A)$ ne dépend pas de la décomposition choisi et donc que $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Soit $A_2 \in \widetilde{A}$ tel que $N_2 \subseteq A_2$ et $\mu(A_2) = 0$. On a $B_1 \subseteq B_1 \cup N_1 \subseteq B_2 \cup N_2 \subseteq B_2 \cup A_2$ et donc $\mu(B_1) \leq \mu(B_2) + 0$ et donc par symétrie $\mu(B_1) = \mu(B_2)$ et ainsi $\widetilde{\mu}$ est bien définie.

On veut maintenant montrer que $\widetilde{\mu}$ est bien une mesure. On a clairement $\widetilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Reste à montrer la σ-additivité. Soit $A \in \widetilde{\mathcal{A}}^\omega$ disjoint. Pour chaque $n \in \omega$, on choisit une décomposition $A_n = B_n \cup N_n$ avec $B_n \in \mathcal{A}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\mu$. On a

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n = \left(\bigcup_{n \in \omega} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \omega} N_n \right)$$

avec $\bigcup_{n\in\omega} B_n \in \mathcal{A}$ disjoint et $\bigcup_{n\in\omega} N_n \in \mathcal{N}_\mu$ disjoint. Finalement on a :

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(B_n) = \sum_{n\in\omega} \widetilde{\mu}(A_n).$$

Et donc $\widetilde{\mu}$ est une mesure.

(5) On suppose ici que $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ est la tribu grossière. Décrire le complété de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Correction : *Il y a deux cas à considérer : $\mu(X) = 0$ et $\mu(X) \neq 0$.*

Si $\mu(X) = 0$, toutes les partie de X sont μ-négligeables et donc $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{N}_\mu = \mathcal{P}(X)$.

Au contraire si $\mu(X) \neq 0$, aucune partie non vide de X n'est négligeable et donc $\mathcal{N}_\mu = \{\emptyset\}$ et par suite, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

(6) On suppose ici que la tribu $\mathcal{A}$ contient le singleton $\{a\}$ où $a \in X$, et que $\mu = \mu_a$ est la mesure de Dirac au point a. Décrire le complété de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Correction : *Notons δ_a la mesure de Dirac au point a. On va montrer que la tribu complétée $\widetilde{\mathcal{A}}$ est égale à $\mathcal{P}(X)$.*

Comme $\{a\} \in \mathcal{A}$, l'ensemble $\{a\}^c \in \mathcal{A}$. Par définition de la mesure de Dirac, $\delta_a(\{a\}^c) = 0$. Soit $A \subseteq X$, on peut écrire $A = (A \cap \{a\}) \cup (A \cap \{a\}^c)$.

L'ensemble $(A \cap \{a\})$ est soit vide, soit égale à $\{a\}$, dans les deux cas il est dans $\mathcal{A}$. L'ensemble $(A \cap \{a\}^c)$ est inclus dans $\{a\}^c$ dont la mesure est nulle et il est donc dans $\mathcal{N}_\mu$. Ainsi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Comme A était quelconque, on a bien $\mathcal{P}(X) = \widetilde{\mathcal{A}}$

Exercice 3. Soient $E = B(\mathbb{R};\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'espace de Banach des fonctions bornées, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On note $h_{a,k} := (x \mapsto a + k(x-a)) \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'homothétie de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}_{>0}$.

On définit les deux ensembles $D_0 := \mathbb{R}_{<1/2}$ et $D_1 := D_0^c = \mathbb{R}_{\geq 1/2}$, et l'application $T \in E^E$ par $T(f)|_{D_i} = h_{i,1/2} \circ f \circ h_{i,3}$ pour $f \in E$ et $i \in \{0;1\}$.

(1) Montrer que T est bien dans E^E, et que pour tous $f, g \in E$, on a $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$ (en particulier que T est *contractante*).

Correction : *Soit $f \in E$, il existe $M > 0$ tel que $f(\mathbb{R}) \subseteq ([-M, M])$. On en déduit $h_{0,1/2} \circ f \circ h_{0,3}(\mathbb{R}) \subseteq \left[\frac{-M}{2}, \frac{M}{2}\right]$ et $h_{1,1/2} \circ f \circ h_{1,3}(\mathbb{R}) \subseteq \left[1 + \frac{-M}{2}, 1 + \frac{M}{2}\right]$ et finalement $T(f)(\mathbb{R}) \subseteq \left[\frac{-M}{2}, 1 + \frac{M}{2}\right]$. Ainsi $T \in E^E$.*

Soient $f, g \in E, x_0 \in \mathbb{R}$ et $i_0 \in \{0,1\}$ tel que $x_0 \in D_{i_0}$. Notons $y_0 := h_{i_0,x_0}(x_0)$. On a :

$$T(f)(x_0) - T(g)(x_0) = h_{i_0,1/2}(f(h_{i,x_0}(x_0))) - h_{i_0,1/2}(g(h_{i_0,x_0}(x_0))) = h_{i_0,1/2}(f(y_0)) - h_{i_0,1/2}(g(y_0)) = \frac{1}{2}\left(f(y_0) - g(y_0)\right).$$

et donc $|T(f)(x_0) - T(g)(x_0)| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|$ et finalement $\|T(f) - T(g)\| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|$.

(2) En déduire que l'équation $T(g) = g$ admet une unique solution g_0 dans $E = B(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Correction : *C'est une application directe du théorème de point fixe de Banach qui nous dit que si ϕ est une application contractante sur un espace métrique complet, alors est admet un unique point fixe.*

(3) On définit le sous-ensemble $F_C \subseteq B(\mathbb{R};\mathbb{R})$ composé de toutes les fonctions f continues, croissantes, nulles sur $]-\infty; 0]$, égales à $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ et égales à 1 sur $[1; +\infty[$.

Montrer que F_C est un fermé de $B(\mathbb{R};\mathbb{R})$ stable par l'application T.

Correction : *L'ensemble F_C est l'intersection dans $B(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de*

- *l'ensemble des fonctions continues*
- *l'ensemble des fonctions croissantes*
- *l'ensemble des fonctions constantes égales à 0 sur $]-\infty, 0]$*
- *l'ensemble des fonctions constantes égales à $\frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$*
- *l'ensemble des fonctions constantes égales à 0 sur $[1, +\infty[$*

On montre facilement que chacun de ces ensembles est un sous-ensemble fermé de $B(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Ceci implique que F_C est fermé.

Soit $f \in F_C$, $T(f)$ est continue et croissante sur D_0 et D_1 comme composée de fonctions continues et croissante. De plus pour $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$, on a $T(f)(x) = \frac{1}{2}f(3x) = \frac{1}{2}$ et pour $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$, on a $T(f)(x) = \frac{1}{2}f(3(x-1)+1) = f(3x-2) = \frac{1}{2}$. Donc $T(f)$ est constante égale à $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ et en particulier continue en $\frac{1}{2}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

On vérifie facilement que $T(f)$ est constante égale à 0 sur $]-\infty, 0]$ et constante égale à 0 sur $[1, +\infty[$ et donc finalement, on a bien $T(f) \in F_C$.

(4) Conclure que $g_0 \in F_C$.

Correction : *On peut appliquer une nouvelle fois le théorème de point fixe mais en voyant maintenant T comme une application de F_C dans F_C qui est complet comme fermé dans un complet. On obtient ainsi un unique point fixe dans F_C ce point fixe est nécessairement g_0.*