Série 6 – Correction (corrigée le 01/04/2020)

Exercice 1. (1) Soit $f\colon X \to Y$ une application. Peut-on toujours trouver des tribus $\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y$, respectivement de X et Y, telles que f est mesurable pour ces tribus ?

Correction : *Oui, cela existe toujours : en effet si on prend $\mathcal{A}_X = \mathcal{P}(X)$, l'application est trivalement mesurable. De même si on prend $\mathcal{A}_Y = \{\emptyset, Y\}$ (la tribue grossière), alors f est trivialement mesurable.*

De manière un peu plus intéressante, on peut fixer $\mathcal{A}_Y$ et poser $\mathcal{A}_X = f^{-1}(\mathcal{A}_Y$. On a vu dans la série 5 précédente que $\mathcal{A}_X$ était une tribu.

Et enfin, si on fixe $\mathcal{A}_X$ on peut considérer la tribu de Y

$$\{B \subset Y |\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X\}.$$

On a montré dans la série précédente le caractère tribu *de cette ensemble de partie de Y.*

(2) Même question en remplaçant « mesurable » par « non mesurable ».

Correction : *Cela dépend de f : soit f est constante et dans ce cas f est mesurable quelquesoient les tribus sur X et sur Y.*

Si au contraire, f n'est pas constante, elle prend au moins deux valeurs distinctes y_1 et y_2. Si l'on considère $\mathcal{A}_X = \{, X\}$ et $\mathcal{A}_Y \sigma(\{\{y_1\}, \{y_2\}\}) \subseteq \mathcal{P}(Y)$. On a $f^{-1}(\{y_1\}) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(\{y_1\}) \neq X$, donc f n'est pas mesurable.

(3) La phrase suivante est-elle correcte ?
Pour tous ensembles non-vides X et Y, il existe une fonction $f\colon X \to Y$ telle que pour toutes tribus $\mathcal{A}_X$ sur X et $\mathcal{A}_Y$ sur Y, f est mesurable.
Justifier.

Correction : *Oui, il suffit de considérer une fonction constante.*

Exercice 2. Montrer que le suprémum d'une famille non dénombrable de fonctions Lebesgue-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ n'est pas forcément Lebesgue-mesurable.

Correction : *On sait d'après le cours qu'il existe un ensemble non mesurable $V \subseteq \mathbb{R}$. Pour $v \in V$, on définit $f_v = \chi_{\{v\}}\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Pour tout $v \in V$, la fonction f_v est étagée (car tout singleton est Lebesgue-mesurable car fermé), et donc Lebesgue-mesurable. On a $f = \sup_{v \in V} f_v = \chi_V$ et cette fonction n'est pas mesurable car $f^{-1}(\{1\}) = V$ n'est pas mesurable.*

Exercice 3. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone, alors elle est Lebesgue-mesurable.

Correction : *Quitte à considérer $-f$, on suppose que f est croissante. Il suffit de montrer que $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est Lebesgue-mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$. Soit $M = \sup\{x \in \mathbb{R} |\, f(x) < a\} = \sup f^{-1}(]\infty, a[)$. Trois possibilités : $M = -\infty$, $M \in \mathbb{R}$, et $M = +\infty$.*

- *Si $M = -\infty$, ceci signifie, par convention, que $f^{-1}(]\infty, a[) = \emptyset$.*
- *Si $M \in \mathbb{R}$, on distingue encore deux cas : soit $f(M) < a$, soit $f(M) \geq a$.*
  - *Si $f(M) < a$, on a $f^{-1}(]\infty, a[) =]-\infty, M]$. L'inclusion $]-\infty, M] \subseteq f^{-1}(]\infty, a[)$ vient de la croissance de f. L'inclusion $f^{-1}(]\infty, a[) =]-\infty, M]$ vient de la définition de sup.*
  - *Si $f(M) \geq a$, $f^{-1}(]\infty, a[) =]-\infty, M[$ pour essentiellement les même raisons.*
- *Enfin si $M = +\infty$, $f^{-1}(]-\infty, a[) = \mathbb{R}$ pour les même raison que précédemment.*

Dans tous les cas $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est mesurable, donc f est mesurable.

Exercice 4. Soient $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Supposons que l'ensemble des points x de $\mathbb{R}$ où $f(x) \neq g(x)$ soit Lebesgue-négligeable. Montrer alors que f est Lebesgue-mesurable si et seulement si g l'est.

Correction : *Notons N l'ensemble sur lequel f et g diffèrent. Il est négligeable donc mesurable car la tribu de Lebesgue est complète pour la mesure de Lebesgue (cours).*

Notons $h = f - g$. Pour l'instant on ne suppose rien ni sur f ni sur g. On va montrer que h est mesurable. Soit $A \in \mathcal{A}_\lambda$ fixé quelconque. De deux choses l'une : soit $0 \in \mathcal{A}$ soit $0 \notin \mathcal{A}$.

Si $0 \notin A$, $h^{-1}(A) \subseteq h^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = N$ et donc h^{-1} est lui-même négligeable donc mesurable.

Si au contraire, $0 \in A$, $h^{-1}(A)^c = h^{-1}(A^c)$ est mesurable d'après le cas précédent et donc $h^{-1}(A)$ est mesurable.

Ainsi dans tous les cas $h^{-1}(A)$ est mesurable et donc h est mesurable.

Supposons f mesurable. Comme $g = f - h$, la fonction g est mesurable. Réciproquement,si g est mesurable, comme $f = g + h$ la fonction f est mesurable.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de construire deux fonctions Lebesgue-mesurables F, G dont la composée $G \circ F$ n'est pas Lebesgue-mesurable.

Soit $\hat{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue, strictement croissante, surjective et telle que $\lambda_1(\hat{g}(K_3)) = 1$ construite dans le cours.

(1) Montrer que $\hat{g}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que $F := \hat{g}^{-1}$ est Lebesgue-mesurable.

Correction : *Rappelons qu'un* homéomorphisme *est une fonction bijective continue d'inverse continue. Il est utile de chercher un exemple de bijection continue qui n'est pas un homéomorphisme.*

C'est un fait général qui ne dépend pas de la fonction $\hat{g}$ en question. En effet, on va montrer le lemme suivant :

Lemme. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et surjective alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. De manière surprenant, la partie difficile de ce lemme est de montrer que la fonction f est continue.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Comme f est surjective, on peut trouver $x_+, x_- \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_\pm) = f(x) \pm \epsilon$. Comme f est strictement croissante, on a $x_- < x < x_+$. Notons $\eta = \min(x - x_-, x_+ - x) > 0$. Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \eta$, on a donc $x_- < y < x_+$ et par croissance stricte de f, $f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$ et donc $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Ainsi f est continue en x et donc sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que la croissance stricte de $\mathbb{R}$ implique l'injectivité de f.

Pour montrer que f^{-1} est elle aussi continue, il suffit de remarquer qu'elle est elle-aussi surjective (par définition) et strictement croissante (par croissance stricte de f). On peut alors appliquer ce que l'on vient de démonter pour f. $\square$

(2) Montrer que $\hat{g}(K_3)$ admet une sous-partie A qui n'est pas dans $\mathcal{A}_{\lambda_1}$. On fixera un tel A dans la suite.

Correction : *Par hypothèse, $\lambda_1(\hat{g}(K_3)) = 1$, donc d'après le théorème de Vitali, il existe une partie A inclue dans $\hat{g}(K_3)$.*

(3) Soit $G := \chi_{F(A)}$. Montrer que G est Lebesgue-mesurable.

Correction : *Comme $A \subseteq \hat{g}K_3$, $F(A) \subseteq F(\hat{g}(K_3)) = K_3$. Le Cantor est négligeable donc Lebesgue-mesurable, et par suite $F(A)$ aussi. Ainsi, G est une fonction étagée et est donc mesubable.*

(4) Montrer que $G \circ F$ n'est pas Lebesgue-mesurable.

Correction : *Il suffit de trouver un borélien dont l'image réciproque par $G \circ F$ n'est pas pas Lebesgue-mesurable. Le singleton $\{1\}$ est un fermé, il est donc borelien. Calculons maintenant $(G \circ F)^{-1}(\{1\})$.*

$$(G \circ F)^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} |\, G \circ F(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} |\, F(x) \in F(A)\} = A$$

La dernière égalité vient de fait que $F = \hat{g}^{-1}$ est bijective.