Série 7 – Correction (corrigée le 08/04/2020)

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, f une fontion mesurable de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Supposons que $\displaystyle\int_\Omega f < +\infty$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et $\displaystyle\int_A f > \int_\Omega f - \epsilon$.

Correction : *Soit $\epsilon > 0$ fixé quelconque. Par définition de l'intégrale, il existe $e \in \mathcal{E}(f)$, telle que $\int e > \int f - \epsilon$. Notons $e = \sum_{i \in I} \lambda_i \chi_{A_i}$ avec I fini. Notons $J = \{j \in I \mid \lambda_j \neq 0\}$. Pour tout $j \in J$, $\mu(A_j) < \infty$ car $\lambda_j \mu(A_j) = \int \lambda_j \chi_{A_j} \leq \int f < +\infty$. On considère l'ensemble $A = \bigcup_{j \in J} A_j$. Il s'agit d'un ensemble de mesure fini, en effet : $\mu(A) \leq \sum_{j \in J} \mu(A_j) < +\infty$. De plus, $\chi_A e = e$. On a donc*

$$\int_A f \geq \int_A e = \int e > \int f - \epsilon.$$

Exercice 2. Trouver un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})^\omega$ telle que :
— la suite $(f_n)_{n \in \omega}$ converge ponctuellement vers une fonction mesurable g,
— la suite $\left(\displaystyle\int f_n\right)_{n \in \omega} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\omega$ converge vers $\displaystyle\int g$,
— il existe $A \in \mathcal{A}_{\lambda_1}$ tel que la suite $\left(\displaystyle\int_A f_n\right)_{n \in \omega} \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}^\omega$ ne converge pas vers $\displaystyle\int_A g$.

Correction : *En fait on peut montrer que ce n'est pas possible si g est d'intégrale finie.*
Pour $n \in \omega$, on définit :

$$\begin{array}{rccl} f_n\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } -n \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{si } n \leq x \leq n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Pour tout $n \in \omega$, la fonction f_n est étagée (c'est la fonction caractéristique d'un fermé) et on a $\int f_n = n + 1$. De plus la suite f converge ponctuellement vers $g := \chi_{\mathbb{R}_{\leq 0}}$ qui est elle-même étagée. On a $\int g = +\infty$ donc la suite $\int f_n$ converge vers $\int g$.
Posons $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$. D'une part, pour tout $n \in \omega$ on a $\inf_A f_n = 1$, donc $\lim \int_A f_n = 1$. D'autre part $\int_A g = 0$.

Exercice 3. On considère ω muni de la mesure de comptage. Soit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\omega$. Que vaut $\displaystyle\int_\omega a$? Justifier.

Correction : *Rappelons que la mesure de comptage μ est donnée par :*

$$\begin{array}{rccl} \mu\colon & \mathcal{P}(\omega) & \to & \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ & X & \mapsto & \mu(X) = \begin{cases} \#X & \text{si } X \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On a $\displaystyle\int_\omega a = \sum_{n \in \omega} a_n$. Montrons le !
Supposons qu'il existe un $x \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $J := a^{-1}([x, +\infty[) = \{n \in \omega \mid a_n \geq x\}$ est infini. On a alors

$$\int a \geq \int x \chi_J = +\infty.$$

D'autre part comme J est infini, on a pour tout $N \in \omega$

$$\sum_{n\omega} a_n \geq \sum_{n \in J} a_n \geq sum_{n \in J} x \geq Nx.$$

et donc $\sum_{n\in\omega} = +\infty$. *Supposons maintenant que pour tout* $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $a^{-1}([x,+\infty[)$ *est fini. Soit* $e \in \mathcal{E}(a)$, *notons* $e = \sum_{i\in I} \lambda_i \chi_{A_i}$ *avec* I *fini,* $\lambda_i > 0$ *et* $A_i \subseteq \omega$. *Pour tout* $i \in I$, A_i *est fini, donc* $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ *est fini. On a :*

$$\int e = \int_A e \leq \sum_{i\in A} e(i) \leq \sum_{i\in A} a_i \leq \sum_{i\in\omega} a_i.$$

Exercice 4 (Difficile). (1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet, A et B deux parties Ω mesurables et disjointes et $f\colon\ \Omega\colon\ \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Montrer que

$$\int_{A\sqcup B} = \int_A f + \int_B f.$$

Correction :

Soit $e \in \mathcal{E}(f\chi_{A\sqcup B})$. *On a* $e = e\chi_{A\sqcup B} = e\chi_A + e\chi_B$. *Or* $e\chi_A \in \mathcal{E}(f\chi_A)$ *et* $e\chi_B \in \mathcal{E}(f\chi_B)$. *Ainsi :*

$$\int e = \int e\chi_A + \int e\chi_B \leq \int_A f + \int_B f,$$

en passant au sup, on obtient $\int_{A\sqcup B} f \leq \int_A f + \int_B f$.

Réciproquement, si $e_A \in \{\chi_{\mathcal{A}}$ *et* $e_B \in \{\chi_{\mathcal{B}}$, *on a* $e_A + e_B \in \{\chi_{\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}}$, *donc*

$$\int e_A + \int e_B = \int e_A + e_B \leq \int_{A\sqcup B}.$$

Ainsi,

$$\int_{A\sqcup B} = \int_A f + \int_B f.$$

On peut naturellement généraliser ceci par récurence à toutes union finie de partie mesurables deux à deux disjointe.

(2) Soit $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ munis de la mesure de Lebesgue et $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue, montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est égale à l'intégrale de Riemann de f entre a et b.
Indication : on pourra découper $[a,b]$ *en petits intervalles semi-ouvert disjoints.*

Correction :

La fonction f *étant continue sur un segment, elle est Riemann-intégrable. D'autre part elle est mesurable et positive. On sait donc aussi l'intégrer au sens de Riemann. Pour éviter les confusions, on note* $\displaystyle ®\!\!\int_a^b f$ *l'intégrale de Riemann de la fonction* f *entre* a *et* b.

On sait (Analyse I) que, comme f *est Riemann-intégrable,*

$$\sup\left\{ ®\!\!\int_a^b e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ e \text{ en escalier} \\ e \leq f \end{array} \right\} \qquad \text{et} \qquad \inf\left\{ ®\!\!\int_a^b E \;\middle|\; \begin{array}{l} E\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ E \text{ en escalier} \\ E \geq f \end{array} \right\}$$

existent et sont égaux, cette valeur commune est $\displaystyle ®\!\!\int_a^b f$.

On remarque qu'une fonction en escalier est étagée (car les intervalles ouverts et fermés sont des boréliens), et pour ces fonctions on a (par définition) :

$$®\!\!\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

Rappelons que

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon\ [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \leq f \end{array} \right\}$$

Comme les fonctions en escaliers sont étagées, on a :

$$\left\{ \circledR\!\!\!\!\int_a^b e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ e \text{ en escalier} \\ e \leq f \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \leq f \end{array} \right\}$$

On en déduit :

$$\circledR\!\!\!\!\int_a^b f = \sup \left\{ \circledR\!\!\!\!\int_a^b e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ e \text{ en escalier} \\ e \leq f \end{array} \right\} \leq \sup \left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \leq f \end{array} \right\} = \int_{[a,b]} f$$

Montrons l'autre inégalité. Soit $e \in \mathcal{E}(f)$ et E une fonction en escalier telle que $f \leq E$. On a évidemment $e \leq E$ donc

$$\int_{[a,b]} e \leq \int_{[a,b]} E = \circledR\!\!\!\!\int_a^b E.$$

Comme ceci est vrai pour n 'importe quelle E, on a :

$$\int_{[a,b]} e \leq \inf \left\{ \circledR\!\!\!\!\int_a^b E \;\middle|\; \begin{array}{l} E\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ E \text{ en escalier} \\ E \geq f \end{array} \right\} = \circledR\!\!\!\!\int_a^b f$$

Comme ceci est vrai pour n'importe quelle e, on a

$$\int_{[a,b]} f = \sup \left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \leq f \end{array} \right\} \leq \circledR\!\!\!\!\int_a^b f$$

On a donc montré $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \circledR\!\!\!\!\int_a^b f.$

Une approche un peu plus pédestre (qui se servait de la question 1) :

Notons que si I est un intervalle inclus dans $[a,b]$, χ_I est Riemman intégrable et étagée et on a :

$$\circledR\!\!\!\!\int \chi_I = \int \chi_I.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $[a,b]$ est compacte, il existe $N > 0$ tel que pour $x, y \in [a,b]$, si $|x-y| \leq \frac{b-a}{N}$ alors $|f(b) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$.

Pour $k \in N$, notons $a_k = a + k\frac{b-a}{N}$ et $I_k = [a_k, a_{k+1}[$, si $k < N-1$ et $I_N = [A_{n-1}, b]$. On a donc

$$[a,b] = \bigsqcup_{k \in N} I_k.$$

Enfin, notons $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$ et $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$. On a $M_k - m_k < \frac{\epsilon}{b-a}$.

On considère les deux fonctions $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ données par :

$$g = \sum_{i=0}^{N-1} m_k \chi_{I_k} \qquad \text{et} \qquad h = \sum_{i=0}^{N-1} M_k \chi_{I_k}$$

On a $g \leq f \leq h$ et $(h-f)(x) \leq \frac{\epsilon}{b-a}$ On a donc :

$$\circledR\!\!\!\!\int g \leq \circledR\!\!\!\!\int f \leq \circledR\!\!\!\!\int h \leq \circledR\!\!\!\!\int g + \epsilon \quad \text{et} \int g \leq \int f \leq \int h \leq \int g + \epsilon.$$

D'autre part,

$$\circledR\!\!\!\!\int g = \sum_{k \in N} \circledR\!\!\!\!\int_{I_k} g = \sum_{k \in N} \circledR\!\!\!\!\int_{I_k} m_k = m_k \circledR\!\!\!\!\int \chi_{I_k} = \sum_{k \in N} m_k \int_{I_k} \chi_{I_k} = \int g.$$

Finalement,

$$\circledR\!\!\!\!\int f \leq \int f + \epsilon \circledR\!\!\!\!\int f + 2\epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϵ, on a

$$\int f = \circledR\!\!\!\!\int f.$$

(3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ et

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ x & \mapsto & \exp(-\alpha x). \end{array}$$

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f$.

Correction : *Sans surprise, on va montrer que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f = \frac{1}{\alpha}$*. Pour ce faire, on va montrer deux inégalités.*

Soit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*. On a* $f\chi_{[0,x]} \leq f$*, donc*

$$\int_{[0,x]} f = \int \chi_{[0,x]} f \leq \int f$$

grâce à la question 2, on obtient

$$\frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right) \leq \int f.$$

Comme ceci est vrai pour tour x*, on a* $\displaystyle\frac{1}{\alpha} \leq \int f$.

L'autre inégalité est un peu plus subtile. Soit $e \in \mathcal{E}(f\chi_{\mathbb{R}_{\leq 0}})$*. On écrit* $e = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$*, avec les* A_i *mesurables et les* $a_i > 0$*. Comme* f *tend vers* 0 *en* $+\infty$*, chacun des* A_i *est borné, et donc leur union* A *aussi :* $A \subseteq [0, M]$ *pour un certain* M*.*

On a donc $e \in \mathcal{E}(f\chi_{[0,M]})$*, et donc*

$$\int e = \int_{[0,M]} e \leq \int f\chi_{[0,M]} = \int_{[0,M]} f \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Finalement, on a bien : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f = \frac{1}{\alpha}$.