Série 8 – Correction (corrigée le 22/04/2020)

Exercice 1. (1) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{\chi_{]0,1[}(x)}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais $f^2 \notin L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction : *Considérons la suite $(g_n)_{n\in\omega}$ définie par $g_n = f\chi_{\left[\frac{1}{n+2}, 1-\frac{1}{n+2}\right]}$. La suite g est croissante, converge ponctuellement vers f et pour tout $n \in \omega$, g_n est mesurable, donc d'après le théorème de converge monotone, on a : $\int f = \int \lim g_n = \lim \int g_n$. Or on sait calculer $\int g_n$ grace à la série précédente : c'est égale l'intégrale de Riemann de g_n (car g_n est continue sur $\left[\frac{1}{n+2}, 1-\frac{1}{n+2}\right]$). On a :*

$$\int g_n = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n+2}}^{1-\frac{1}{n+2}} = 2\sqrt{1-\frac{1}{n+2}} - 2\sqrt{\frac{1}{n+2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 < \infty$$

Donc f est dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On applique le même théorème à f^2 et $\left(g_n^2\right)_{n\in\omega}$. On obtient : $\int f^2 = \lim \int g_n$ et :

$$\int g_n^2 = [\ln(x)]_{\frac{1}{n+2}}^{1-\frac{1}{n+2}} = \ln 1 - \frac{1}{n+2} - \ln\frac{1}{n+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc $f^2 \notin L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(2) Trouver des fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pas toutes deux dans $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $fg \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction : *On peut par exemple prendre f n'importe quelle fonction de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g la fonction unité i.e. la fonction $\chi_{\mathbb{R}}$ dont l'intégrale est infini. On a donc $g \notin L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais $fg = f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Exercice 2. Soit $f \in L^1(\Omega, [0; 1])$ telle que $\int f = \int f^2$.
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}_\Omega$ telle que $f = \chi_A$ presque partout.

Correction : *On considère la fonction $g = f - f^2 = f(\chi_\Omega - f)$. Elle est à valeur positive et $\int g = \int f - \int f^2 = 0$. Donc, d'après le cours, g est nulle p.p. c'est-à-dire qu'il existe N de mesure nulle telle que $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus N$. Ceci implique que pour tout $x \in \Omega \setminus N$, $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$. Notons $A = f^{-1}(\{1\})$. C'est un mesurable car l'image réciproque d'un fermé. Pour tout $x \in \Omega \setminus N$, on a $f(x) = \chi_A(x)$. Donc $f = \chi_A$ p.p., en effet si $x \in A$, $f(x) = 1$ par définition de A et sinon $f(x) = 0$.*

Exercice 3. Trouver une suite de fonctions $f \in \left(L^1(\Omega, \overline{\mathbb{R}})\right)^\omega$ telle que :
— la suite f converge ponctuellement vers une fonction f_∞ intégrable,
— la suite $\left(\int f_n\right)_{n\in\omega}$ ne converge pas vers $\int f_\infty$.

Correction : *On peut par exemple prendre la suite $\left(\chi_{[n,n+1]}\right)_{n\in\omega}$. Elle converge ponctuellement vers la fonction nulle d'intégrale nulle et pour tout n, $\int \chi_{[n,n+1]} = 1$.*

Exercice 4. Trouver deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une propriété $\mathsf{P}(x)$ dépendant d'une paramètre $x \in \mathbb{R}$ telles que $f = g$ p.p. et f satisfait P p.p., mais pour tout x, g ne satisfait pas $\mathsf{P}(x)$.

Correction : *On peut prendre f la fonction nulle, $g = \chi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathsf{P}(x)$ la propriété "être continue en x". Les fonctions f et g sont égales sur le complémentaire de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est négligeable, donc $f = g$ p.p..*

Par ailleurs, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, g n'est continue nul part. Mais la fonction nulle est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Soit $(e_k)_{k\in\omega}$ et $(E_k)_{k\in\omega}$ deux suites de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en escaliers telles que $e_k \leq f \leq E_k$ pour tout k et

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 e_k = \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 E_k \qquad \text{(au sens de Riemann).}$$

(1) Justifier l'existence de ces deux suites et montrer qu'on les supposer croissante pour e et décroissante pour E. Ce que l'on fait dans la suite.

Correction : *Rappelons qu'une fonctions $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite* en escalier*, si il existe une suite $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq 1$ telle que h soit constante sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$. L'existence est une conséquence de l'intégrabilité au sens de Riemann : Comme f est Riemann-intégrable,*

$$\sup \left\{ \int_0^1 e \,\middle|\, \begin{array}{c} e \text{ en escalier} \\ e \leq f. \end{array} \right\} = \inf \left\{ \int_0^1 E \,\middle|\, \begin{array}{c} E \text{ en escalier} \\ E \geq f. \end{array} \right\}.$$

On peut donc trouver deux suites $(\widetilde{e}_k)_{k\in\omega}$ et $(\widetilde{E}_k)_{k\in\omega}$ qui convergent vers cette valeur commune.

Pour s'assurer que ces suites sont respectivement croissante et décroissante, on utilise le fait suivant : si s_1 et s_2 sont deux fonctions en escalier, alors $\max(s_1, s_2)$ et $\min(s_1, s_2)$ sont elles-aussi en escalier. On construit alors $(e_k)_{k\in\omega}$ et $(E_k)_{k\in\omega}$ par récurrence :

$$e_0 = \widetilde{e}_0, \quad e_n = \max(\widetilde{e}_n, e_{n-1}) \quad \text{et} \quad E_0 = \widetilde{E}_0, \quad E_n = \min(\widetilde{E}_n, E_{n-1}).$$

(2) Montrer que les suites e et E admettent des limites. On les note e_∞ et E_∞.

Correction : *Pour tout point x, la suite de réels $(e_k(x))_{k\in\omega}$ (resp. $(E_k(x))_{k\in\omega}$) est croissante (resp. décroissante) et majorée (minorée) par f(x) (resp. minorée) donc converge.*

(3) Montrer que les fonctions e_∞ et E_∞ sont mesurables et sont égales p.p.

Correction : *On a $e_\infty = \sup_{k\in\omega} e_k$ et $E_\infty = \inf_{k\in\omega} E_k$ et pour tout $k \in \omega$, e_k et E_k, sont mesurables, donc e_∞ et E_∞ sont mesurables.*

Pout tout k, on a :

$$\int_{[0,1]} E_\infty - e_\infty \leq \int_{[0,1]} E_k - e_k = R\int_0^1 E_k - e_k.$$

Or on sait que cette dernière quantité tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc $\displaystyle\int_{[0,1]} E_\infty - e_\infty \leq 0$, mais $E_\infty - e_\infty \geq 0$ donc finalement $\displaystyle\int_{[0,1]} E_\infty - e_\infty = 0$ et donc $E_\infty = e_\infty$ p.p..

(4) Montrer que f est mesurable et qu'elle est intégrable.

Correction : *Notons X l'ensemble des $x \in [0,1]$ tel que $E(x) \neq e(x)$. C'est ensemble est de mesure nul. Sur $[0,1] \setminus X$, $f = E$ et donc $f(x) = E(x)$ p.p., donc, comme E est mesurable, f est mesurable.*

(5) On note A l'ensemble $(e_\infty - E_\infty)^{-1}(\{0\})$ privé de tous les points de discontinuités des fonctions e_k et E_k pour tout $k \in \omega$. Montrer que f est continue sur A.

Correction : *Notons tout d'abord que le complémentaire de A dans $[0,1]$ est de mesure nulle, donc on aura montré que f est continue presque partout.*

Soit $x \in A$. Comme x n'est le point de discontinuité d'aucune des fonction $e_\bullet$ et $E_\bullet$, il existe une suite d'intervalle ouvert $]a_k, b_k[$, tel que pour tout k $x \in]a_k, b_k[$ et e_k et E_k sont constantes sur cet intervalle (égale respectivement à $e_k(x)$ et $E_k(x)$). Soit $\epsilon > 0$, comme $x \in (e_\infty - E_\infty)^{-1}(\{0\})$, il existe $N\omega$, tel que pour tout $k \geq N$, $|E_k(x) - e_k(x)| < \epsilon$. Pour tout $y \in]a_N, b_N[$, on a :

$$-\epsilon < e_n(x) - E_N(x) = e_N(y) - E_N(x) \leq f(y) - f(x) \leq E_N(y) - e_N(x) = E_N(x) - e_N(x) < \epsilon,$$

ce qui montre que f est continue en x.