Série 9 – Correction (corrigée le 29/04/2020)

Exercice 1. Soient $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ deux fonctions pas nécessairement mesurables telles que $\overline{\int} f, \overline{\int} g, \underline{\int} f$ et $\underline{\int} g$ soient différents de $\pm\infty$.

(1) Montrer que $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.

Correction : *On rappelle que*

$$\underline{\int} f = \sup \left\{ \int h \,\middle|\, h \in L^1, h \leq f \right\} \quad \text{et} \quad \overline{\int} f = \inf \left\{ \int h \,\middle|\, h \in L^1, h \geq f \right\}.$$

Pour alléger, on note :

$$\underline{L^1}(f) = \left\{ h \in L^1 | h \leq f \right\} \quad \text{et} \quad \overline{L^1}(f) = \left\{ h \in L^1 | h \geq f \right\}.$$

L'hypothèse faites sur les intégrales supérieure et inférieure de f implique que ces ensembles sont non-vide. Pour toutes $h_1 \in \underline{L^1}(f)$ et $h_2 \in \overline{L^1}(f)$, on a $h_1 \leq f \leq h_2$, et comme h_1 et h_2 sont dans L^1 on peut appliquer la monotonie : $\int h_1 \leq \int h_2$, en passant au sup *(pour h_1) et à l'*inf *(pour h_2), on obtient $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.*

(2) Montrer que $\underline{\int} - f = -\overline{\int} f$.

Correction : *Soit $h \in \overline{L^1}(f)$, alors $-h \in \underline{L^1}(-f)$, et de plus $\int -h = -\int h$. En passant au* sup *pour h (donc à l'*inf *pour $-h$), on obtient Montrer que $\underline{\int} - f = -\overline{\int} f$.*

(3) Montrer que $\underline{\int}(f+g) \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g$.

Correction : *Soient $h_1 \in \underline{L^1}(f)$ et $h_2 \in \underline{L^1}(f)$, on a $h_1 + h_2 \in L^1$ et $h_1 + h_2 \leq f + g$, donc $h_1 + h_2 \in \underline{L^1}(f+g)$. Ainsi, on a :*

$$\int h_1 + \int h_2 = \int (h_1 + h_2) \leq \underline{\int} f + g.$$

Finalement en passant au sup *sur h_1 et h_2, on obtient $\underline{\int}(f+g) \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g$.*

(4) Montrer que $\overline{\int}(f+g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$.

Correction : *On applique les deux questions précédentes :*

$$\overline{\int}(f+g) = -\underline{\int} - (f+g) \leq -\underline{\int} - f - \underline{\int} - g = \overline{\int} f + \overline{\int} g.$$

(5) Montrer que : $f + g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}) \Rightarrow \int(f+g) = \underline{\int} f + \overline{\int} g$. On pourra utiliser que $f = (f+g) + (-g)$.

Correction : *Comme $f + g \in L^1$, on a $\underline{\int}(f+g) = \overline{\int}(f+g) = \int(f+g)$. On suit l'indication (et $g = f + g + (-f)$) et on se sert des questions précédentes. On obtient :*

$$\underline{\int} f \geq \underline{\int}(f+g) + \underline{\int}(-g) = \int (f+g) - \overline{\int} g,$$
$$\overline{\int} g \leq \overline{\int}(f+g) + \overline{\int}(-f) = \int (f+g) - \underline{\int} f,$$

et donc $\int(f+g) = \underline{\int} f + \overline{\int} g$.

(6) Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\overline{\int}\chi_A \leq \lambda^*(A)$, où λ^* est la mesure extérieure de Lebesgue.

Correction : *Si $\lambda^*(A) = +\infty$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc dès à présent que $\lambda^*(A) < +\infty$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de A par un nombre au plus dénombrable de pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$ tel que $\sum_{i\in I}\lambda(A_i) < \infty$. Pour tout $i \in I$ la fonction χ_{A_i} est mesurable et donc (pourquoi ?) $g := \sum_{i\in I}\chi_{A_i}$ est mesurable et pour tout x in $\mathbb{R}^d$, $g(x) \geq 0$ et pour tout $x \in A$, $g(x) \geq 1$. Finalement, $g \geq \chi_A$ donc $g \in \overline{L^1}(A)$. Par ailleurs, on a :*

$$\overline{\int}\chi_A \leq \int g = \int\sum_{i\in I}\chi_{A_i} = \sum_{i\in I}\int\chi_{A_i} = \sum_{i\in I}\mu(A_i).$$

En passant à l'infimum, sur les recouvrements, on obtient $\overline{\int}\chi_A \leq \lambda^*(A)$.

(7) En utilisant des théorèmes du cours et les questions précédentes, trouvez des exemples de f, g tels que toutes les inégalités des questions 1, 3 et 4 sont strictes.

Correction : *Comme $\lambda_1([0,1]) > 0$ et d'après le théorème de Vitalli, on peut se donner un ensemble $V \subset [0,1]$ tel que V n'est pas mesurable. Posons $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\lambda_1}, \lambda_1)$, $f = \chi_V$ et $g = -\chi_V$. On sait que f n'est pas mesurable, donc $\underline{\int}f \neq \overline{\int}f$ et donc $\underline{\int}f < \overline{\int}f$.*

D'après la question 2, on a aussi $\underline{\int}g < \overline{\int}g$. Comme $f+g = 0$, $f+g \in L^1$, et $\underline{\int}(f+g) = \overline{\int}(f+g) = 0 \int f+g$. D'après la question 5, on a :

$$\underline{\int}f + \underline{\int}g < \underline{\int}f + \overline{\int}g = \underline{\int}(f+g) = \int(f+g) = \overline{\int}(f+g) = \underline{\int}f + \overline{\int}g < \overline{\int}f + \overline{\int}.$$

Exercice 2. Pour $n \in \omega_{\geq 1}$, on définit la fonction :

$$f_n\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$.

Correction : *Pour tout $n \geq 1$, f_n est mesurable car continue. En effet, d'une part elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par les propriétés habituelles. En 0, il suffit de montrer que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f_n(x) = f_n(0)$. Or on a pour $x \neq 0$:*

$$f_n(x) = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = f_n(0).$$

L'avant dernière égalité vient du fait que $\frac{\sin(y)}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$ car sin est dérivable et sa dérivée en 0 est 1.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fixé,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

et pour $x = 0$, on a aussi $f_n(0) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = \frac{1}{1+x^2}$.

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\omega}$ converge ponctuellement vers la fonction

$$f_\infty\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \tfrac{1}{1+x^2}$$

De plus, la fonction f_∞ domine toutes les f_n et est intégrable (on va le vérifier). En effet, pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{|\sin(\frac{x}{n})|}{|\frac{x}{n}|}\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} = f_\infty(x),$$

car $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Exercice 3. (1) Pour $n \in \omega$, calculer $\displaystyle\int_{]0,1[} x^n \log x \mathrm{d}x$.

Correction : *Cette fonction est continue et de signe constant sur* $]0,1[$*, on peut donc sans problème utiliser l'intégrale de Riemann.*

$$\begin{aligned}
\int_{]0,1[} x^n \log x \mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} x^n \log x \mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\left[\frac{x^{n+1} \log x}{n+1} \right]_{\epsilon}^{1-\epsilon} - \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{x^{n+1-1}}{n+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_{\epsilon}^{1-\epsilon} \right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

(2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{\log(x)}{1-x} \mathrm{d}x$.

Correction : *On considère plutôt la fonction* $g\colon]0,1[\in x \mapsto -\frac{\log(x)}{1-x}$ *qui a le bon goût d'être positive. Pour tout* $n \in \omega$*, on pose* $f_n\colon]0,1[\ni x \mapsto -\sum_{k=0}^{n} x^k \log x \mathrm{d}x$*. De plus la suite* $(f_n)_{n\in\omega}$ *est une suite croissante de fonctions positives et mesurables. On a donc, d'après le théorème de convergence mononote :*

$$\int_{]0,1[} g = \sup_{n\in\omega} \int_{]0,1[} f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi, on obtient : $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{\log(x)}{1-x} \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$.

Rappel : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.