Test 1 – Correction – 45 minutes (le 18/03/2020)

Exercice 1. Soit $\mathcal{F} = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rccl} \rho\colon & \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ &]a,b[& \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq b, \\ 1+b-a & \text{si } a < 1 < b, \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

(1) Justifier qu'on peut induire une mesure extérieure φ à l'aide de ρ.

Correction : *La famille $\mathcal{F}$ contient l'ensemble vide, de plus ρ est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Donc, d'après la Proposition 3 du cours, la formule :*

$$\varphi(A) := \inf_{(R_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(A)} \sum_{i\in I} \rho(R_i),$$

où $A \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(A)$ désigne l'ensemble des recouvrements au plus dénombrable de A à l'aide de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{F}$, est bien une mesure extérieure.

(2) Calculer $\varphi([0,1])$.

Correction : *Soit $\epsilon > 0$, on a $\left\{\left]-\frac{\epsilon}{2}, 1+\frac{\epsilon}{2}\right[\right\}$ est un recouvrement fini (avec un seul élément) de $[0,1]$, or on a $\rho\left(\left]-\frac{\epsilon}{2}, 1+\frac{\epsilon}{2}\right[\right) = 1 + \left(1+\frac{\epsilon}{2}\right) - \left(-\frac{\epsilon}{2}\right) = 2+\epsilon$. Ainsi $\varphi([0,1]) \leq 2+2\epsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\varphi([0,1]) \leq 2$.*

Soit $(R_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de $[0,1]$ par des éléments de $\mathcal{F}$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(R_j)_{j\in J}$ avec $J \subseteq I$ fini. Comme $1 \in [0,1]$, il existe au moins un $j_0 \in J$ tel que $1 \in R_{j_0}$.

Pour tout $j \in J$, on a $\rho(R_j) \geq \int_0^1 \chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x$, et pour j_0, on a : $\rho(R_{j_0}) \geq 1 + \int_0^1 \chi_{R_{j_0}}(x)\mathrm{d}x$. De plus, comme $(R_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de $[0,1]$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $\sum_{j\in J} \chi_{R_j}(x) \geq 1$. Autrement dit, $\sum_{j\in J} \chi_{R_j} \geq \chi_{[0,1]}$. Enfin, pour tout j la fonction $[0,1] \ni x \mapsto \chi_{R_j}(x)$ est continue par morceau donc Riemann intégrable et ainsi la fonction $[0,1] \ni x \mapsto \sum_{j\in J} \chi_{R_j}(x)$ est elle aussi Riemann intégrable (car la somme est finie), et on a :

$$\int_0^1 \sum_{j\in J} \chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = 1$$

Finalement, on a :

$$\sum_{i\in I} \rho(R_i) \geq \sum_{j\in J} \rho(R_j) \geq 1 + \sum_{j\in J} \int_0^1 \chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^1 \sum_{j\in J} \chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x \geq 2.$$

Comme le recouvrement au plus dénombrable R était quelconque on a bien $\varphi([0,1]) \geq 2$ et finalement $\varphi([0,1]) = 2$.

Exercice 2. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ & X & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est vide,} \\ 1 & \text{si } X \text{ est fini non vide ou dénombrable,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que φ est une mesure extérieure.

Correction : *Il suffit de montrer que $\varphi(\emptyset) = 0$, que φ est croissante pour l'inclusion et qu'elle est σ-sous-additive. Le premier point est vrai par définition de φ. La croissance est évidente.*

Montrons la σ-sous-additivité : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\omega}$, notons $B = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ On distingue trois cas $B = \emptyset$, B est non-vide et au plus dénombrable, et enfin B n'est pas dénombrable.

Si $B = \emptyset$, on a $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \omega$. et on a bien :

$$0 = \varphi(B) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n) = \sum_{n\in\omega} 0 = 0$$

Si B est non-vide et au plus dénombrable, on peut trouver un $n_0 \in \omega$ tel que A_{n_0} est non-vide et on a donc :

$$1 = \varphi(B) \leq \varphi(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$$

.

Si B n'est pas dénombrable, il existe au moins un n_0 tel A_{n_0} n'est pas dénombrable, et on a donc :

$$+\infty = \varphi(B) \leq \varphi(A_{n_0}) = +\infty = \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n).$$

On en conclut que φ est une mesure extérieure.