Test 2 – Correction – 45 minutes (le 22/04/2020)

Exercice 1. Soit $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet. Soient $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $f \in L^1(\Omega)$ que $f = g$ p.p. C'est-à-dire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle.

(1) Montrer que g est mesurable.

Correction : *D'après les hypothèses, la fonction $h = g - f$ est nulle presque partout. Montrons qu'elle est mesurable. Soit A un borélien, il suffit de montrer que $h^{-1}(A)$ est mesurable. Notons $N = h^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, on a $\lambda_1(N) = 0$. On distingue deux cas : soit $0 \notin A$, soit $0 \in A$.*

Si $0 \notin A$, $h^{-1}(A) \subseteq N$ et donc $h^{-1}(A)$ est mesurable car la tribu $\mathcal{A}$ est complète.

Si $0 \in A$, $0 \notin A^c$ et $h^{-1}(A) = \left(h^{-1}(A^c)\right)^c$ est mesurable.

Dans tous les cas $h^{-1}(A)$ est mesurable donc h est mesurable et donc $g = f + h$ aussi.

(2) Montrer que $g \in L^1(\Omega)$ et que $\displaystyle\int f = \int g$.

Correction : *On va montrer que $h \in L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int h = 0$. Les fonction $h_+ = \max(h, 0)$ et $h_- = \max(-h, 0)$ sont elle aussi nulle presque partout donc mesurable et leur intégrales sont toutes les deux nulles, donc finalement, $\displaystyle\int h = \int h_+ - \int h_- = 0$. On en déduit que $g = f + h$ est dans $L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int g = \int f - \int h = \int f$.*

Indication : pour les deux questions, on pourra considérer la fonction $g - f$.

Exercice 2. Soit $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})^\omega$ une suite de fonctions mesurables ($\mathbb{R}$ étant munie de la tribu borélienne). Montrer que les fonctions

$$\begin{array}{rccl} \inf_{n\in\omega} f \colon & \Omega & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \mapsto & \inf\{f_n(x) | n \in \omega\}. \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} \sup_{n\in\omega} f \colon & \Omega & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \mapsto & \sup\{f_n(x) | n \in \omega\}. \end{array}$$

sont mesurables.

Correction : *Notons $g = \sup_{n\in\omega} f_n$. La tribu borélienne est engendrée par les ensembles de la forme $I_a :=]a, +\infty[$, pour $a \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer $g^{-1}(I_a)$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$. On fixe dont un $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On va montrer que :*

$$g^{-1}(I_a) = \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a),$$

ce qui suffit pour conclure, car chacun des ensembles $f_n^{-1}(I_a)$ est mesurable.

Soit $n \in \omega$ et $x \in f_n^{-1}(I_a)$, on a $a < f_n(x) \leq g(x)$, donc $g(x) > a$, donc $x \in g^{-1}(I_a)$. Donc $\bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a) \subseteq g^{-1}(I_a)$.

Réciproquement, soit $x \in g^{-1}(a)$, on a donc $g(x) > a$. Comme $\frac{a+g(x)}{2} < g(x)$, d'après la définition de sup, on peut trouver $n \in \omega$ tel que $f_n(x) \geq \frac{a+g(x)}{2} > a$, donc $x \in f_n^{-1}(I_a)$ et donc $x \in \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a)$. Et finalement $g^{-1}(I_a) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a)$ et donc $g^{-1}(I_a) = \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a)$.

Pour l'infimum, on pourrait raisonner exactement de la même manière avec les ensembles de la forme $]-\infty, b[$, mais on peut aussi se servir du fait suivant :

$$\inf_{n\in\omega} f_n = -\sup_{n\in\omega}(-f_n).$$

Ceci permet de conclure car comme f_n est mesurable pour tout n, $-f_n$ est elle aussi mesurable pour tout n et donc leur supremum et finalement $\inf_{n\in\omega} f_n$ est mesurable.