Test 3 – Correction – 45 minutes (le 13/05/2020)

L'énoncé de ce test est volontairement trop long pour la durée impartie. Le barème en tient compte.

Exercice 1. Soit X un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une algèbre d'ensemble. On note $\mathcal{A}_\sigma$ la collection des unions au plus dénombrables d'ensemble de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ la collection des intersections au plus dénombrables d'ensembles de $\mathcal{A}_\sigma$. Soit μ_0 une prémesure sur $\mathcal{A}$ et $\mu^\star$ la mesure extérieure induite par μ_0.

(1) Montrer que pour tout $E \subset X$, et tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tel que $E \subseteq A$ et $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(E) + \epsilon$.

Correction : *On fixe $E \subset X$ et $\epsilon > 0$. Par définition de la mesure extérieure induite,*

$$\mu^\star(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \mu_0(A_i) \middle| (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I \text{ est un recouvrement au plus dénombrable de E} \right\}$$

On peut donc se donner $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ tel que $\sum_{i \in I} \mu_0(A_i) \leq \mu^\star(E) + \epsilon$ et $E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i =: A$. On a, par définition de la mesure induite, $\mu^\star(A) \leq \sum_{i \in I} \mu_0(A_i) \leq \mu^\star(E) + \epsilon$. Et d'autre part, on a bien $A \in \mathcal{A}_\sigma$.

(2) Soit $E \subseteq X$ tel que $\mu^\star(E) < \infty$. Montrer que E est mesurable si et seulement si il existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tel que $E \subseteq B$ et $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.

Correction : *On commence par supposer l'existence d'un tel B et on va montrer que E est mesurable (via la caractérisation de Carathéodory). Notons tout d'abord que d'après le cours, la tribu des mesurables contient $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ et donc ce B est mesurable. Soit $C \subseteq X$ fixé quelconque, il nous suffit de montrer que*

$$\mu^\star(C) = \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(C \setminus E).$$

On va montrer que :

$$\mu^\star(C \cap E) = \mu^\star(C \cap B) \qquad \text{et} \qquad \mu^\star(C \setminus E) = \mu^\star(C \setminus B).$$

Comme $(C \cap E) \subseteq (C \cap B)$, on a $\mu^\star(C \cap E) \leq \mu^\star(C \cap B)$ (par croissance des mesures extérieures). Comme $C \cap B = (C \cap E) \cup (C \cap B \setminus E)$. Par sigma sous-additivite, on obtient $\mu^\star(C \cap B) \leq \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(C \cap B \setminus E) \leq \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(B \setminus E) = \mu^\star(C \cap E)$. Ainsi, on $\mu^\star(C \cap E) = \mu^\star(C \cap B)$

Comme $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus E)$, on a $\mu^\star(C \setminus B) \leq \mu^\star(C \setminus E)$. D'autre part, comme $C \setminus E = (C \setminus B) \cup (C \cap (B \setminus E))$, on a $\mu^\star(C \setminus E) \leq \mu^\star(C \setminus B) + \mu^\star(C \cap (B \setminus E)) \leq \mu^\star(C \setminus B) + \mu^\star(B \setminus E) = \mu^\star(C \setminus B)$, on a donc $\mu^\star(C \setminus B) = \mu^\star(C \setminus E)$.

Comme B est mesurable, on a :

$$\begin{aligned} \mu^\star(C) &= \mu^\star(C \cap B) + \mu^\star(C \setminus B) \\ &= \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(C \setminus E), \end{aligned}$$

et donc E est mesurable.

Supposons maintenant E mesurable et de mesure finie. Pour tout entier $n \geq 1$, donnons nous (grace à la question précédente) un $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ tel que $E \subseteq A_n$ et $\mu^\star(A_n) \leq \mu^\star(E) + \frac{1}{n}$.

Notons $B = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. On a bien $E \subseteq B$ et $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. Reste à voir que $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.

Tout d'abord, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\mu^\star(E) \leq \mu^\star(B) \leq \mu^\star(A_n)\mu^\star(E) + \frac{1}{n},$$

donc $\mu^\star(E) = \mu^\star(B)$ Comme E est mesurable, on a :

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap E) + \mu^\star(B \setminus E) = \mu^\star(E) + \mu^\star(B \setminus E).$$

Comme $\mu^\star(B) = \mu^\star(E)$ est fini, on a $\mu^\star(B \setminus E) = 0$

Exercice 2. Pour tout entier $k \geq 1$, on définit

$$f_k\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{>0} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-kx} - 2e^{-2kx}. \end{array}$$

(1) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\omega_{\geq 1}}$ converge ponctuellement sur $\mathbb{R}_{>0}$, vers une fonction que l'on appelera f et que l'on calculera.

Correction : *Soient $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et $n \in \omega_{\geq 1}$ fixés quelconques. On calcule*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-kx} - 2e^{-2kx}\right) = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} - 2\sum_{k=1}^{n} e^{-2kx} \\ &= \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} - \frac{2\left(e^{-2x} - e^{-2(n+1)x}\right)}{1-e^{-2x}} = \frac{\left(e^{-x} - e^{-(n+1)x}\right) + \left(e^{-2x} - e^{-(n+2)x}\right) - 2\left(e^{-2x} - e^{-2(n+1)x}\right)}{1-e^{-2x}} \\ &= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + e^{-n+1}\frac{2e^{-(n+1)x} - 1 - e^{-x}}{1-e^{-2x}}\end{aligned}$$

Cette quantité tend vers $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ quand n tend vers $+\infty$. La suite $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\omega_{\geq 1}}$ converge donc ponctuellement sur $\mathbb{R}_{>0}$ vers $f\colon\ x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

(2) Calculer

$$\int_{]0,\infty[} f \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{]0,\infty[} f_k.$$

Correction : *Par théorème de convergence monotone pour la suite $(f\chi_{[\frac{1}{n},n]})_{n\in\omega_{\geq 1}}$, et comparaison Riemann/Lebesgue, on a*

$$\int_{]0,\infty[} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},n]} f = \lim_{n\to+\infty} \text{®}\!\!\int_{[\frac{1}{n},n]} f = \lim_{n\to+\infty} \left[-\log(1+e^{-x})\right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=n} = \log 2.$$

D'autre part, pour tout entier strictement positif k, on a, par théorème de convergence dominée pour la suite $(f_k\chi_{[\frac{1}{n},n]})_{n\in\omega_{\geq 1}}$ (par $|f_k|$), et comparaison Riemann/Lebesgue, on a

$$\int_{]0,\infty[} f_k = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},n]} f = \lim_{n\to+\infty} \text{®}\!\!\int_{[\frac{1}{n},n]} f_k = \lim_{n\to+\infty} \left[-e^{-x} + e^{-2x}\right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=n} = 1 - 1 = 0.$$

(3) Commenter.

Correction : *Les deux quantités sont différentes, ce qui montre que le théorème de convergence dominé ne s'applique pas dans ce cas : Il manque l'hypothèse de domination.*