

TOPOLOGIE MÉTRIQUE — FEUILLE 2 — PRINTEMPS 2026

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique,

- (1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur d pour que toutes les suites convergentes sur X soient stationnaires.
- (2) Dans ce cas, que dire des fonctions continues de (X, d) vers (Y, d') ?

Exercice 2. (1) Soient $a < b$ des réels. Montrer que les deux intervalles $]0, 1[$ et $]a, b[$ sont homéomorphes.

- (2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que les deux intervalles $] - \infty, a[$ et $]b, +\infty[$ sont homéomorphes.
- (3) Montrer que $x \mapsto \tan(x \cdot \pi/2)$ réalise un homéomorphisme entre $]0, 1[$ et $]0, +\infty[$.
- (4) Montrer que $] - 1, 1[$ et $] - \infty, +\infty[$ sont homéomorphes.
- (5) En déduire que deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ sont toujours homéomorphes.
- (6) Montrer que par contre $[0, 1]$ et $]0, 1[$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 3. Soit (X, δ) un espace métrique et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Pour x, y dans X , on pose :

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Pour $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, $B_\delta(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r pour δ et, quand cela a du sens, $B_{d_f}(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r pour d_f .

- (1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que d_f soit une distance sur X .
- (2) On suppose que f est continue sur (X, δ) et que d_f est une distance sur X .
 - (a) Montrer que pour tout $x \in X$ et $r' \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_\delta(x, r) \subset B_{d_f}(x, r')$.
 - (b) Montrer que les ouverts de (X, d_f) sont des ouverts de (X, δ) .
 - (c) Si I désigne l'application identité de X dans X . Que peut-on dire de la continuité de $I : (X, \delta) \rightarrow (X, d_f)$?
 - (d) Montrer que $I : (X, d_f) \rightarrow (X, \delta)$ n'est pas forcément continue.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que χ_A , la fonction indicatrice de A , soit continue.

Exercice 5. Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et $f : X \rightarrow X'$ une application.

- (1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) L'application f est continue.
 - (ii) Pour toute partie B de X' , $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.
 - (iii) Pour toute partie A de X , $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
- (2) Trouver un exemple d'application non-continue f pour lequel pour toute partie A satisfait $\widehat{f(A)} \subseteq f(\mathring{A})$.

Exercice 6. Soit (Z, δ) un espace métrique. Si A, B sont deux parties de Z , on note $\text{dist}(A, B) = \inf\{\delta(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

- (1) Soient x et y deux suites de $Z^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(x_n, y_n) \geq r$. Montrer qu'il existe une partie M infinie de $\mathbb{N}$ telle que

$$\text{dist}(\{x_n | n \in M\}, \{y_n | n \in M\}) \geq \frac{r}{3}.$$

On pourra distinguer les cas où il existe $x \in X$ (resp. $y \in Y$) tel que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} | d(x_n, x) < \frac{r}{3}\}$ (resp. $\{n \in \mathbb{N} | d(y_n, y) < \frac{r}{3}\}$) est infini. En dehors de ces cas, on peut construire M par récurrence.

- (2) Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f: X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
- (i) L'application f est uniformément continue sur X .
 - (ii) Pour toutes parties A, B de X , si $\text{dist}(A, B) = 0$ alors $\text{dist}(f(A), f(B)) = 0$.
 - (iii) Pour toutes suites a, b de $X^{\mathbb{N}}$, si la suite $(d(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 alors, la suite $(d'(f(a_n)), d'(f(b_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie fermée de X . En reprenant la notation dist de l'exercice précédent, montrer que l'application $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x) = \text{dist}(A, \{x\})$ est uniformément continue sur X (avec $\mathbb{R}$ muni de la métrique standard).