

TOPOLOGIE MÉTRIQUE — FEUILLE 3 — PRINTEMPS 2026

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé. On note S la sphère et $\overline{B}$ la boule fermée de rayon 1 et de centre 0. Montrer que S est compacte si et seulement si $\overline{B}$ l'est.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E , on pose $\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé qui n'est pas complet.

Exercice 3. Soit (X, d) un ensemble muni de la métrique discrète, montrer qu'il est compact si et seulement si il est fini.

Exercice 4. Montrer qu'un espace métrique compact admet une partie dense et dénombrable.

Exercice 5. Lister toutes les topologies sur $\emptyset$, sur $\{1\}$, sur $\{1, 2\}$ et sur $\{1, 2, 3\}$. Lesquelles sont homéomorphes¹?

Exercice 6 (La trace de la trace est la trace). Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $B \subseteq A \subseteq X$ deux parties de X . Montrer que $(\mathcal{O}_A)_B = \mathcal{O}_B$, où $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_B$ sont les topologies traces de la topologie $\mathcal{O}$ sur A et B respectivement, et $(\mathcal{O}_A)_B$ est la topologie trace de la topologie $\mathcal{O}_A$ sur B .

Exercice 7. Rappelons que pour un espace topologique, métrisable implique T2 (Hausdorff), T2 implique T1 (Fréchet) et T1 implique T0 (Kolmogorov). Le but de cet exercice est de trouver des contre-exemples à chacune des implications réciproques. Il est utile de chercher de tels contre-exemples sans se faire spoiler par les questions qui suivent.

- (1) Trouver une topologie qui soit T0 mais pas T1 parmi les topologies de l'exercice 5.
- (2) On considère la topologie sur $\mathbb{R}$ engendrée par les compléments des singletons. Décrire cette topologie. Quelle implication réciproque est contredite par cette topologie?
- (3) Considérons l'ensemble $X = [0; 1]^{[0; 1]}$ muni de la topologie produit. Montrer que X est bien T2. Les éléments de X sont les fonctions de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$. Montrer que l'ensemble X_0 des fonctions nulles sauf en un nombre fini de points est dense dans X (c'est-à-dire que $\overline{X_0} = X$). Montrer qu'en revanche il n'existe pas de suite dans $X_0^{\mathbb{N}}$ convergeant vers la fonction identiquement égale à 1. En déduire que X n'est pas métrisable.

1. Deux topologies de X $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont homéomorphes si il existe un homéomorphisme $f: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$.

Exercice 8. On cherche à construire un espace topologique qui ne soit pas T2, mais dans lequel les limites de suites sont uniques. On munit l'espace $[0; 1]$ munis de la topologie habituelle, et on considère $X = [0; 1] \sqcup \{\star\}$ pour lequel on décide que les ouverts contenant $\{\star\}$ sont les ensembles du type $\{\star\} \cup O$, où O est un ouvert dense de $[0; 1]$.

- (1) Montrer que la procédure décrite fournit bien une topologie sur X .
- (2) Montrer que l'ensemble X n'est pas T2.

On considère u une suite de $X^{\mathbb{N}}$.

- (3) Que dire de u si elle converge vers $\star$?
- (4) En déduire que si u converge vers $\ell \in [0; 1]$, elle ne converge pas vers $\star$.
- (5) Conclure qu'il y a bien unicité des limites sur X .

Exercice 9. On considère l'espace $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \sqcup \{0'\}$ et on déclare que $U \subset \mathbb{R}'$ est ouvert si U ou $U \setminus \{0'\} \cup \{0\}$ est un ouvert $\mathbb{R}$.

- (1) Montrer qu'on définit bien une topologie sur $\mathbb{R}'$ ainsi.
- (2) Montrer que $\mathbb{R}'$ est T1.
- (3) L'espace $\mathbb{R}'$ est-il T2?
- (4) Y-a-t'il unicité de la limite dans $\mathbb{R}'$?

Exercice 10 (Topologie finale). Soient Y un ensemble, $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $\bar{f} = (f_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ une famille d'application.

Montrer qu'il existe une unique topologie $\mathcal{O}$ sur Y telle que quelque soit T un espace topologique et $g: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow T$, alors g est continue si et seulement si $g \circ f_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow T$ est continue pour tout $i \in I$.