

TOPOLOGIE MÉTRIQUE – FEUILLE 4 – PRINTEMPS 2026

Exercice 1. Montrer que les connexes de \mathbb{R} sont exactement les intervalles.

Exercice 2 (Topologie boîte et continuité). On munit \mathbb{R} de la topologie habituelle et on considère $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (1) Donner une prébase de la topologie produit sur X . Dans cet exercice, on note \mathcal{P} la topologie produit.
- (2) Donner un ensemble A non-ouvert tel que $\pi_i(A) \subseteq \mathbb{R}$ soit ouvert pour tout $i \in \mathbb{N}$ (π_i désigne la projection sur la i ème composante).

On va munir X d'une autre topologie (appelée *topologie boîte*). On considère l'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in \mathbb{N}} O_i \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid O_i \text{ ouvert de } \mathbb{R} \right\},$$

et on note \mathcal{T} la topologie engendrée par \mathcal{B} .

- (3) Les topologies \mathcal{T} et \mathcal{P} sont-elles comparables? Si oui, laquelle est plus fine que l'autre.
- (4) Montrer que la fonction $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x)_{n \in \mathbb{N}}$ est continue si on munit X de la topologie produit. On pourra, par exemple, argumenter soit par propriété universelle.
- (5) Montrer en revanche que la fonction f n'est pas continue si on munit X de la topologie boîte.

Exercice 3 (Topologie boîte et compacité). On considère l'ensemble $A = \{0, 1\}$, muni de la topologie discrète.

- (1) Montrer que A est compact.
- (2) On munit $X = A^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Montrer, sans utiliser le théorème de Tychonov (ni quelconque, ni fini) que X est compact.

On munit maintenant X d'une topologie alternative : la topologie boîte comme dans l'exercice précédent : c'est la topologie engendrée par la famille

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in \mathbb{N}} O_i \subseteq A^{\mathbb{N}} \mid O_i \text{ ouvert de } A \right\},$$

- (3) Décrire la topologie boîte dans ce cas là.
- (4) Montrer que X muni de la topologie boîte n'est pas compact.

Exercice 4. Soit X un espace topologique. On rappelle que l'on munit X de la relation \sim_{ca} définie par $x \sim_{\text{ca}} y$ s'il existe une application continue $\gamma: [0; 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Montrer que \sim_{ca} est une relation d'équivalence. On sera particulièrement soigneux pour la transitivité.

Exercice 5 (Groupe fondamental). Soit X un espace topologique et $x \in X$ un point de X . On considère l'ensemble de chemin de x vers x . On dit que deux chemins γ_0 et γ_1 sont *homotopes* s'il existe une application $\Gamma : [0; 1]^2 \rightarrow X$ continue telle que :

- Pour tout $t \in [0; 1]$ et $i \in \{0, 1\}$, $\gamma_i(t) = \Gamma(t, i)$.
- Pour tout $t \in [0; 1]$, $\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) = x$.

- (1) Montrer que l'homotopie est une relation d'équivalence. On appelle $\pi_1(X, x)$ l'ensemble quotient.
- (2) En s'inspirant de la preuve de la transitivité de \sim_{ca} , construire un produit \cdot sur l'ensemble des chemins de x à x .
- (3) Montrer que ce produit passe bien au quotient. C'est à dire que si $\gamma_0, \gamma_1, \mu_0, \mu_1$ sont quatre chemins tels que γ_i et μ_i sont homotopes, alors $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ et $\mu_0 \cdot \mu_1$ sont homotopes.
- (4) Montrer que ce produit admet un élément neutre.
- (5) Montrer que ce produit est associatif.
- (6) Montrer que tout élément admet un inverse. Ainsi on aura montré que $\pi_1(X, x)$ est un groupe qui s'appelle le *groupe fondamentale de* (X, x) .
- (7) Montrer que si X est connexe par arc, alors pour tout x, y , $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$.
- (8) Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue alors f induit un morphisme de groupe $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$.