

TOPOLOGIE MÉTRIQUE — FEUILLE 5 — PRINTEMPS 2026

**Exercice 1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel normé. Montrer que les applications

$$\|\cdot\| : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| \end{array}, \quad \begin{array}{l} E \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \mathbb{k} \times E \rightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$$

sont continues. Les espaces  $E \times E$  et  $\mathbb{k} \times E$  sont munis des normes  $\max(\|\cdot\|, \|\cdot\|)$  et  $\max(\|\cdot\|, \|\cdot\|)$  respectivement.

**Exercice 2.** Soient  $a < b \in \mathbb{R}$  et  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Pour  $f, g \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ , on note :

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_q = \left( \int_a^b |f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{et} \quad \langle f; g \rangle = \int_a^b fg.$$

où les intégrales sont prises indifféremment au sens de Riemann ou de Lebesgue.

- (1) Rappeler l'inégalité de Young.
- (2) Montrer que pour tout  $f, g \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ ,  $|\langle f; g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .
- (3) Montrer que :  $\|f\|_p = \sup \{ |\langle f; g \rangle| \text{ pour } \|g\|_q = 1 \}$ .
- (4) En déduire que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ .
- (5) Que se passe-t-il pour  $p = 1$  ? pour  $p = +\infty$  ?
- (6) Comment peut-on définir une norme  $\|\cdot\|_p$  sur  $\mathcal{C}^0([a; b], E)$ , où  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé ?

**Exercice 3.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $p \in [1, +\infty[$

- (1) Montrer que si  $\ell^p(\mathbb{N}, E)$  est complet, alors  $E$  est complet.
- (2) Montrer que si  $E$  est complet,  $\ell^\infty(\mathbb{N}, E)$  est complet.

**Exercice 4.** On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{k}[X]$  de la norme  $N_1$ , définie par  $N_1 \left( \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) = \sum_{k=0}^n |a_k|$

- (1) Montrer que la formule  $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ , pour  $P \in E$  permet de définir une autre norme sur  $\mathbb{k}[X]$ .
- (2) On considère l'application linéaire de dérivation  $f : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ , définie par  $f(P) = P'$ .
  - (a) L'application  $f : (\mathbb{k}[X], N_1) \rightarrow (\mathbb{k}[X], N_1)$  est-elle continue ?
  - (b) L'application  $f : (\mathbb{k}[X], N) \rightarrow (\mathbb{k}[X], N)$  est-elle continue ?
- (3) On considère l'application linéaire  $g : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ , définie par  $g(P) = X^2 \cdot P$ .
  - (a) L'application  $g : (\mathbb{k}[X], N_1) \rightarrow (\mathbb{k}[X], N_1)$  est-elle continue ?
  - (b) L'application  $g : (\mathbb{k}[X], N) \rightarrow (\mathbb{k}[X], N)$  est-elle continue ?

**Exercice 5.** (1) On rappelle que pour tout  $p \in [1, +\infty]$ ,  $\mathbb{k}[X]$  peut être vu comme un sous-espace de  $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{k})$ . Expliquer pourquoi.

- (2) Montrer que si  $p \in [1, +\infty[$ , l'espace  $\mathbb{k}[X]$  est dense dans  $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{k}), \|\cdot\|_p)$ .
- (3) Montrer que l'espace  $\mathbb{k}[X]$  n'est pas dense dans  $(\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{k}), \|\cdot\|_\infty)$ .

- (4) Montrer que l'espace  $\mathbb{k}[X]$  est dense dans  $(c_0(\mathbb{N}, \mathbb{k}), \|\cdot\|_\infty)$ , l'espace des suites convergent vers 0.

**Exercice 6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On rappelle que  $(\mathcal{F}_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé.

- (1) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{C}_b^0(X; E)$  des applications continues bornées de  $X$  dans  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}_b(X, E)$ .
- (2) Montrer que l'espace  $\mathcal{C}_b^0(X; E)$  est fermé dans  $(\mathcal{F}_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Exercice 7.** On considère l'espace vectoriel normé  $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$  des suites réelles de carrés sommables. Soit  $T: \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  l'application linéaire définie pour tout  $x \in \ell^2$  par  $T(x)_n = x_{n-1}$  si  $n \geq 1$  et  $T(x)_0 = 0$ .

- (1) Montrer que  $T$  est une isométrie, en déduire qu'elle est continue.
- (2) L'application  $T$  est-elle injective? bijective?
- (3) Déterminer une application linéaire continue  $S: \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  telle que  $S \circ T$  soit l'identité de  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .
- (4) L'application  $S$  est-elle une isométrie?
- (5) Montrer que  $S$  est continue et calculer  $\|S\|$ .
- (6) Peut-on remplacer 2 par  $p \in [1, +\infty]$  dans cet exercice?

**Exercice 8.** Soit  $\lambda = (\lambda_n)$  une suite réelle bornée. On considère

$$U: \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\ x \mapsto (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- (1) Montrer que  $U$  définit bien une application linéaire de  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  dans lui-même.
- (2) Montrer que  $U$  est continue.
- (3) Calculer  $\|U\|$ .

**Exercice 9.** On considère l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  des fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$ . On munit  $E$  de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ . Soit  $g \in E$  est une fonction qui s'annule en  $1/2$  et seulement en ce point.

- (1) Montrer que l'application :

$$\varphi: \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 fg$$

est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ .

- (2) Calculer  $\|\varphi\|$ .