# Interrogation du 09/03/26.

1) Non, l'ensemble X n'est pas borné.

En effet : Pour $k \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(k)}$ définie par $u_0^{(k)} = k$ et $u_n = 0$ pour $n \geq 1$. est bornée, converge vers 0 donc $u^{(k)} \in X$.

mais $d(u^{(k)}, u^{(0)}) = \|u^{(k)} - u^{(0)}\|_\infty = \|u^{(0)}\|_\infty = k$.

donc le diamètre de X est plus grand que tout entier. Ainsi X n'est pas borné.

2) Non, l'ensemble X n'est pas ouvert dans $E_b$.

Pour le justifier on va montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $B(u^{(0)}, \varepsilon) \not\subset X$.

On fixe donc $\varepsilon > 0$ on considère la suite $v$ définie par $v_n = (-1)^n \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite $v$ est bornée donc $v \in E_b$, mais elle ne converge pas donc $v \notin X$. Par ailleurs,

$$d(u^{(0)}, v) = \|v\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ donc}$$

$\boxed{B(u^{(0)}, \varepsilon) \not\subset X.}$

3) Non, l'ensemble $X$ n'est pas fermé dans $E_b$. Par le montrer on va construire une suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'élément de $X$ qui converge dans $E_b$ mais dont la limite n'est pas dans $X$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $u^{(k)}$ comme étant la suite constante égale à $1-\frac{1}{k}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n^{(k)} = 1-\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\frac{1}{k} \in ]-1,1[$

Donc $u^{(k)} \in X$.

Soit $v$ la suite constante égale à $1$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a: $d(u^{(k)}, v) = \|u^{(k)} - v\|_\infty = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

donc $u^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} v$

or $v$ converge vers $1 \notin ]-1,1[$ donc $\boxed{v \notin X}$.

4) Oui l'application $f$ est continue. On va montrer qu'elle est même 1-Lipschitz.

Soient $u$ et $v$ deux éléments de $X$ et $l$ et $l'$ leurs limites.

$u-v$ est une suite convergeante (et dont la limite appartient à $]-2;2[$. On a $\|u-v\|_\infty \geq |u_n - v_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

donc $\|u-v\|_\infty \geq |l-l'|$. et donc $\boxed{d(f(u), f(v)) \leq d(u,v)}$.

Ainsi $f$ est 1-Lipschitz.

5) Là encore, on va montrer que :

$$id_{\ell^1(\mathbb{R})} : (\ell^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (\ell^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

est 1-Lipschitz et donc continue

Soient $u$ et $v \in \ell^1(\mathbb{R})$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - v_n| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k - v_k| = \|u-v\|_1.$$

donc en passant au sup,

$\boxed{\|u-v\|_\infty \leq \|u-v\|_1}$. Donc la ~~fonction~~ est 1. Lipschitz.

6) pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite

$w^{(k)}$ définie par :

$$w_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } 0 \leq n < k \\ 0 & \text{si } n \geq k \end{cases}$$

par exemple : $w^{(4)} = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0 \ldots$

$w_0^{(4)}$ $w_1^{(4)}$ $w_2^{(4)}$ $w_3^{(4)}$ $w_4^{(4)}$ $w_5^{(4)}$, ....

on a $\|w^{(k)}\|_\infty = \frac{1}{k}$ donc $w^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} 0_{\ell^1(\mathbb{R})}$

mais $\|w^{(k)}\|_1 = k \times \frac{1}{k} = 1$ donc $\boxed{w^{(k)} \underset{k\to\infty}{\overset{\|\cdot\|_1}{\not\to}} 0_{\ell^1(\mathbb{R})}}$

donc $id_{\ell^1(\mathbb{R})} : (\ell^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\ell^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas continue