TOPOLOGIE MÉTRIQUE — INTERROGATION ÉCRITE 1 — PRINTEMPS 2026

45 MINUTES

On considère E_b l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{|u_n|,\ n\in\mathbb{N}\}$$

et $X \subseteq E_b$ l'espace des suites réelles convergeantes dont la limite appartient à $]-1;1[$.

(1) L'ensemble X est-il borné ?

(2) L'ensemble X est-il ouvert dans E_b ?

(3) L'ensemble X est-il fermé dans E_b ?

(4) L'application $f\colon X\to\mathbb{R}$, définie par $f(u)=\lim_{n\to\infty} u_n$ est-elle continue ?

On considère maintenant l'espace

$$\ell^1(\mathbb{R}) := \left\{ u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{telle que } \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty \right\}.$$

que l'on muni de la norme $\|\cdot\|_1$, définie par : $\|u\|_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

(5) Montrer que l'application $\mathrm{id}_{\ell^1(\mathbb{R})}\colon (\ell^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)\to(\ell^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est continue.

(6) Montrer que l'application $\mathrm{id}_{\ell^1(\mathbb{R})}\colon (\ell^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)\to(\ell^1(\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$ n'est pas continue.