Corrigé CC2 - Topologie métrique

Exercice 1

1) $U \subseteq X$ est ouvert si

$$\boxed{\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x,\varepsilon) \subseteq U.}$$

2) Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur X. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ est une base si tout élément de $\mathcal{T}$ s'écrit comme une union (quelconque) d'éléments de $\mathcal{B}$.

3) On sait que les boules ouverts sont ouvertes

donc $\{B(x,\frac{1}{n}) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Soit $U \in \mathcal{T}_d$. $\forall x \in U, \exists \varepsilon_{x,U} > 0$ tq $B(x,\varepsilon_{x,U}) \subseteq U$

pour $\varepsilon_{x,U} > 0$, on peut trouver $n_{x,U} \in \mathbb{N}^*$ tq $0 < \frac{1}{n_{x,U}} \leq \varepsilon_{x,U}$.

on a donc $\forall x \in U$, $B(x,\frac{1}{n_{x,U}}) \subseteq B(x,\varepsilon_{x,U}) \subseteq U$. $(*)$

Ainsi, on a $U = \bigcup_{x \in U} B(x,\frac{1}{n_{x,U}})$. ($\supseteq$ vient de $(*)$, $\subseteq$ vient de $x \in B(x,\frac{1}{n_{x,U}})$ $\forall x \in U$)

Donc $\boxed{\{B(x,\frac{1}{n}) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}^*\} \text{ est une base de } \mathcal{T}_d.}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La collection $(B(x,\frac{1}{n}))_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Par compacité, on peut en

extraire un sous recouvrement fini $\left(B(x,\frac{1}{n})\right)_{x\in I_n}$ $\# I_n < \infty$

Posons $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. I est au plus dénombrable.

Montrons que I est dense dans X.

Pour cela, on va montrer que $\forall x \in X, \forall \varepsilon>0, \exists y \in I$ tq

$y \in B(x,\varepsilon)$

Comme $\varepsilon>0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $0<\frac{1}{n}\leq\varepsilon$. Comme $\left(B(y,\frac{1}{n})\right)_{y\in I_n}$

est un recouvrement de X, il existe donc $y\in I_n$ tq

$x\in B(y,\frac{1}{n})$ donc $d(x,y)<\frac{1}{n}\leq\varepsilon$. donc $y\in B(x,\varepsilon)$.

Finalement $\boxed{I \text{ est dense dans } X.}$

5) On reprend le I (au plus dénombrable) de la question précédente et on conclue

$$\boxed{\mathcal{B} = \left\{ B(y,\tfrac{1}{n}) \;\middle|\; y\in I,\ n\in\mathbb{N}^* \right\}}$$

$\mathcal{B}$ est bien au plus dénombrable. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont des boules ouvertes, donc $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}_d$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathcal{T}_d$.

Soit $U\in\mathcal{T}_d$. et $x\in U$ $\exists\varepsilon>0$ tq $B(x,\varepsilon)\subseteq U$

Soit n_x tq $\frac{1}{n_x}<\frac{\varepsilon}{2}$. et y_x tq $d(x,y_x)<\frac{1}{n}$

on a $x\in B(y_x,\frac{1}{n_x})\subseteq B(x,\varepsilon)\subseteq U$ donc

$U = \bigcup_{x\in X} B(y_x,\frac{1}{n_x})$ $\boxed{\text{et } \mathcal{B} \text{ est bien une base au plus dénombrable de } \mathcal{T}_d}$

Exercice 2

1) Si $A \subset X$, la topologie trace sur A est donnée par $\mathcal{O}_A = \{ O \cap A \mid O \in \mathcal{O} \}$

2) La topologie initiale $\mathcal{O}_i$ de $i : A \hookrightarrow X$ est la topologie la moins fine sur A tq i soit continue

Soit $O \in \mathcal{O}$, $i^{-1}(O) = O \cap A \in \mathcal{O}_A$ donc

$\mathcal{O}_A$ rend i continue donc $\mathcal{O}_i \subseteq \mathcal{O}_A$.

De plus on sait que $\{ i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O} \}$ est une prébase de $\mathcal{O}_i$. Or d'après ce qu'on vient de voir $\{ i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O} \} = \mathcal{O}_A$ donc $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{O}_i$ donc

$$\boxed{\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_i}$$

3) D'après 2), $i : (A, \mathcal{O}_A) \longrightarrow (X, \mathcal{O})$ est continue

Soit $g : (Y, \tilde{\mathcal{T}}) \longrightarrow (A, \mathcal{O}_A)$.

$\Rightarrow$ si g est continue, $i \circ g$ est continue par composition d'application continue.

$\Leftarrow$ on suppose $i \circ g : Y \longrightarrow X$ continue.

Soit $U \in \mathcal{O}_A$. $\exists O \in \mathcal{O}$ tq $U = O \cap A$.

car $g : Y \to A$

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) &= \{ x \in Y \mid g(x) \in U \} \\ &= \{ x \in Y \mid g(x) \in O \cap A \} = \{ x \in Y \mid g(x) \in O \} \\ &= \{ x \in Y \mid (i \circ g)(x) \in O \} = (i \circ g)^{-1}(O) \in \tilde{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

Donc g est continue

Ainsi $\boxed{g \text{ continue ssi } i \circ g \text{ continue}}$

Ex 3 :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n = \mathbb{1}_{\{n\}} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq n \\ 1 \text{ si } x = n \end{cases}$$

la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, de plus si $n \neq m$,

$$d(f_n, f_m) = 1$$

Ainsi, aucune sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est de Cauchy.

donc aucune sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc X n'est pas séquentiellement compact. Donc X n'est pas compact (car X est un espace métrique).

2) D'après le cours, on sait que si $\mathcal{B}$ est une prébase de $[0,1]$ alors une prébase de $\mathcal{T}$ est donnée par

$$\{ \pi_x^{-1}(O) \mid x \in \mathbb{R}, O \in \mathcal{B} \}$$

or $\pi_x^{-1}(O) = O \times \prod_{y \neq x} [0,1]$ donc une prébase est donnée par

$$\boxed{\{ O \times \prod_{y \neq x} [0,1] \mid x \in \mathbb{R}, O \text{ ouvert de } [0,1] \}}.$$

3) * Méthode avec la propriété universelle :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\pi_x^{(d)} : (X,d) \longrightarrow ([0,1], |\cdot|)$

$f \longmapsto f(x)$.

est continue car 1-Lipschitz donc d'après la propriété universelle, il existe $\varphi : (X,d) \to (X, \mathcal{T})$ continue tel que $\forall x \in X$, $\pi_x^{(d)} = \pi_x \circ \varphi$. On a nécessairement $\varphi = id_X$.

donc $id : (X,d) \longrightarrow (X,\mathcal{T})$ est continue

* Méthode "à la main" :

Il suffit de montrer que les éléments de la prébase de la Q2 sont ouverts pour la distance d.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq a < b \leq 1$ et $f \in]a,b[\times \prod_{y \neq x} [0,1] = U$.

~~cela signifie~~ $f \in U$ signifie $f(x) \in]a,b[$.

Comme $f(x) \in]a,b[$ il existe $\varepsilon > 0$ tq $]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\subseteq]a,b[$.

Si $d(f,g) < \varepsilon$, on a en particulier $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$

donc $g \in U$ donc $B_d(f,\varepsilon) \subseteq U$ et donc U est ouvert pour la distance d. donc $id : (X,d) \to (X,\mathcal{T})$ est continue.

4) Tous les ouverts de $\mathcal{T}$ sont ouverts pour d. donc la topologie $\mathcal{T}_d$ est plus fine que $\mathcal{T}$

3) Une base de $\mathcal{T}$ est donnée par :

$$\mathcal{B}' = \left\{ O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n \times \prod_{x \notin \{x_1 \dots x_n\}} [0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ O_i \text{ ouvert de } [0,1] \end{array} \right\}$$

si $U \in \mathcal{B}'$ est non vide, alors $\exists f \in \mathcal{B}'$ et $x \in \mathbb{R}$ tq

$f(x) = 1$ donc $U \not\subset Bd(0, \frac{1}{2})$

donc $Bd(0, \frac{1}{2})$ ne peut pas s'écrire comme union d'éléments de $\mathcal{B}'$ donc $Bd(0, \frac{1}{2})$ n'est pas un ouvert de $(X, \mathcal{T})$

Ex 4 : Evidemment, il y a plein de façon de répondre à cette question.

1) la compacité permet déduire (dans un cadre métrique) la continuité uniforme de la continuité (thm de Heine)

2) elle permet aussi d'affirmer qu'une fonction $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~est~~ bornée et atteint ses bornes. (bornes atteinte)

K : compact

3) elle permet d'assurer l'existence de point fixe (théorème de Picard) et d'en déduire l'existence de solution aux problèmes de Cauchy (théorème de Cauchy - Lipschitz)