# TOPOLOGIE MÉTRIQUE — INTERROGATION ÉCRITE 2 — PRINTEMPS 2026

90 MINUTES – 30 MARS 2026

*Les dispositifs communiquants (téléphones, montres connectées, etc.) sont interdits ainsi que tous les documents.*

*Le sujet n'est pas très long. Vous êtes invité à prendre le temps pour rédiger de manière claire et pertinente.*

**Exercice 1.** Soit $(X, d)$ un espace métrique.

(1) Rappeler la définition d'ensemble ouvert pour la distance $d$.

(2) Rappeler la définition de base pour une topologie.

(3) Montrer que la famille $(B(x, \frac{1}{n}))_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ x\in X}}$ forme une base pour la topologie induite par $d$.

(4) En déduire que si $(X, d)$ est compact, alors il admet un sous-ensemble $A$ dense et au plus dénombrable.

(5) Enfin, montrer que si $(X, d)$ est compact, alors sa topologie admet une base au plus dénombrable (c'est-à-dire une base consistant en un nombre au plus dénombrable de parties de $X$).

**Exercice 2.** Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$. On appelle $\iota\colon A \to X$ l'injection canonique de $A$ dans $X$.

(1) Rappeler la définition de la topologie trace $\mathcal{O}_A$ sur $A$.

(2) Montrer que la topologie trace sur $A$ coïncide avec la topologie initiale pour $\iota$.

(3) Si $(Y, \mathcal{T})$ est un espace topologique quelconque, alors montrer qu'une application $g\colon (Y, \mathcal{T}) \to (A, \mathcal{O}_A)$ est continue si, et seulement si, $\iota \circ g\colon (Y, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{O})$ est continue.

**Exercice 3.** On considère $X := [0, 1]^{\mathbb{R}} = \prod_{x\in\mathbb{R}}[0, 1]$, l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $[0, 1]$. On appelle $\mathcal{T}$ la topologie produit sur $X$ (pour $[0, 1]$ muni de la métrique habituelle). D'autre part, on définit la distance $d$ en posant

$$d(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

*Attention, la topologie $\mathcal{T}$ n'est pas* a priori *celle induite par $d$, on va voir qu'*a posteriori *non plus.*

(1) Montrer à l'aide d'un contre-exemple que $(X, d)$ n'est pas compact.

(2) Donner une prébase de $(X, \mathcal{T})$.

(3) Montrer que $\mathrm{id}\colon (X, d) \to (X, \mathcal{T})$ est continue.

(4) Peut-on en déduire une relation de finesse ou de grossièreté entre $\mathcal{T}$ et la topologie induite par $d$ ?

(5) Montrer que $B_d(0, \frac{1}{2})$ n'est pas un ouvert de $(X, \mathcal{T})$.

**Exercice 4.** En quelques lignes, expliquer en vous basant sur un exemple et/ou un théorème, l'intérêt de la notion de compacité.