Interro 3

Ex1 : Thm de Riesz :

Soit E un espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La boule unité fermée est compacte

ii) Tous les fermés bornés sont compacts

iii) E est de dimension fini.

Ex2 :

i) Soit $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ un polynôme.

Tous les a_i sauf un nombre fini sont nuls donc il existe $d \in \mathbb{N}$ tq $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$. et

donc $\|P\|_\infty = \sup\{|a_i| \,|\, i \in \mathbb{N}\} = \max\{|a_i| \,|\, 0 \leq i \leq d\}$.
$\in \mathbb{R}_+$.

donc $\boxed{\|.\|_\infty \text{ est bien défini}}$

Montrons que c'est une norme :

Séparabilité : soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\|P\|_\infty = 0$.

Notons $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$. on a $\forall i \in \mathbb{N}$

$|a_i| \leq 0$ donc $\forall i \in \mathbb{N}$ $a_i = 0$ donc $P = 0$

D'autre part, si $P=0$ on a évidemment $\|P\|_\infty = 0$.

donc $\boxed{\|P\|_\infty = 0 \iff P = 0}$.

<u>absolue homogénéité</u>: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$. $\|\lambda P\|_\infty = \sup\{|\lambda a_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$

$= \sup\{|\lambda| \cdot |a_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$

$|\lambda| \geq 0$

$= |\lambda| \sup\{|a_i| \; i \in \mathbb{N}\}$.

$\boxed{\|\lambda P\|_\infty = |\lambda| \cdot \|P\|_\infty}$.

<u>Inégalité triangulaire</u>: Soit $P = \sum a_i X^i$ et $Q = \sum b_i X^i$ deux polynôme.

$\|P+Q\|_\infty = \sup\{|a_i + b_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$

d'autre part $\forall i \in \mathbb{N}$ $\|P\|_\infty \geq |a_i|$ et $\|Q\|_\infty \geq |b_i|$.

donc $\|P\|_\infty + \|Q\|_\infty \geq |a_i| + |b_i| \geq |a_i + b_i|$

inégalité Δ par 1.1.

Ainsi $\|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ est un majorant de $\{|a_i + b_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$.

donc $\boxed{\|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty}$.

2) L'application φ est clairement linéaire.
Pour montrer qu'elle est continue il suffit donc de montrer que l'ensemble

$A = \{ \|\varphi(P)\|_\infty \mid P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_\infty = 1 \}$ est bornée.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\|P\|_\infty = 1$.

On a $\|\varphi(P)\|_\infty = \|P + XP\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|XP\|_\infty$

Or on vérifie facilement que $\|XP\|_\infty = \|P\|_\infty$.

Donc $\underline{\|\varphi(P)\|_\infty \leq 2\|P\|_\infty = 2}$;

et donc $\boxed{\varphi \text{ est continue}}$

Par définition $|||\varphi||| = \sup A$. On vient de voir que $|||\varphi||| \leq 2$.
Considérons $P = X+1$. On a $\|P\|_\infty = 1$
et $\varphi(P) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$ donc $\|\varphi(P)\|_\infty = 2$.
donc $|||\varphi||| \geq 2$ donc $\boxed{|||\varphi||| = 2}$

3) L'application Ψ est clairement linéaire. Il nous suffit donc de montrer que

$B := \{ \|\Psi(P)\|_\infty \mid P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_\infty = 1 \}$ n'est pas borné. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\|X^n\|_\infty = 1$ et

$\|\Psi(X^n)\|_\infty = \|n X^{n-1}\|_\infty = n$ donc

$n \in B$

Ainsi $\mathbb{N}^* \subseteq B$ donc B n'est pas borné et

$\boxed{\Psi \text{ n'est donc pas continue}}$

Exercice 3 :

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$

et H_n : "B_n est convexe"

H_0 signifie "B_0 est convexe" or $B_0 = A_0$ est convexe par hypothèse donc H_0 est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq H_n est vraie.

$B_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$ et $A_{n+1} \cap B_n \supseteq A_{n+1} \cap A_n \neq \emptyset$

Donc, d'après le cours, B_{n+1} est convexe et donc H_{n+1} est vraie et ainsi on a démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ B_n est convexe.

On a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Or les $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont une collections de convexes dont l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_0$ n'est pas vide. (car $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$) donc d'après le cours, $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ est convexe.}}$

2) Si on remplace "convexe" par "convexe par arc" dans le raisonnement précédent, on obtiant une preuve.

<u>Exercice 4.</u> Soit $x \in X$

$\forall n,p \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \|f_n - f_p\|_\infty$

donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

or E est complet donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $f(x)$ sa limite. On définit ainsi une fonction $f : X \longrightarrow E$ et on a pour tout $x \in X$.

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

2) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc bornée. Soit donc $M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty \leq M.$$

Soit $x \in X$. donc $f_n(x) \to f(x)$, il existe n_0 tq $\|f_n(x) - f(x)\| \leq 1$ donc.

$$\|f(x)\| \leq \|f_n(x)\| + 1 \leq \|f_n\|_\infty + 1$$
$$\leq M+1$$

ne dépend ni de n ni de x.

Donc f est bornée

3) Soit $\varepsilon > 0$. et N tq $\forall n, k \geq N$,

$$\|f_n - f_k\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in X$. on a $\|f_n(x) - f_k(x)\|_\infty \leq \varepsilon$

en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient :

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout x, on a :

$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ et par définition de limite $\boxed{f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f \text{ pour la norme } \|\cdot\|_\infty}$.

4) U est un voisinage de $f(x)$ s'il existe un ouvert O de E tel que $f(x) \in O \subseteq U$.

Comme E est un espace métrique, c'est équivalent à :

$\exists\, r > 0$ tq $B(f(x), r) \subseteq U$

5) f est continue en x si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.

6) Soit $y \in f_n^{-1}\left(B\left(f_n(x), \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$. On a donc $\|f_n(y) - f_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. on veut mq

$\|f_n(y) - f(x)\| < \varepsilon$

On a $\| f_n(y) - f(x) \| = \| f_n(y) - f_n(x) + f_n(x) - f(x) \|$

$$\leq \| f_n(y) - f_n(x) \| + \| f_n(x) - f(x) \|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \| f_n - f \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

donc $y \in f_n^{-1}(B(f_n(x), \varepsilon))$. Donc

$$\boxed{f_n^{-1}\left(B\left(f_n(x), \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \subseteq f_n^{-1}\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)}$$

7) On s'inspire de la question d'avant et on montre que si $\| f_n - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$,

$$\boxed{f_n^{-1}\left(B\left(f_n(x), \frac{\varepsilon}{3}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{3}\right)\right).} \quad (*)$$

En effet si $y \in f_n^{-1}\left(B\left(f_n(x), \frac{\varepsilon}{3}\right)\right)$, (**) on a

$$\| f(y) - f(x) \| = \| f(y) - f_n(y) + f_n(y) - f_n(x) + f_n(x) - f(x) \|$$

$$\leq \| f(y) - f_n(y) \| + \| f_n(y) - f_n(x) \| + \| f_n(x) - f(x) \|$$

$$\overset{(**)}{<} \| f - f_n \|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \| f - f_n \|_\infty < \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

et on a donc bien $(*)$.

Soit V un voisinage de $f(x)$. Pour un $\varepsilon > 0$ $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$.

Ainsi pour un n assez grand.

$$f_n^{-1}(B(f_n(x), \frac{\varepsilon}{3})) \subseteq f^{-1}(U)$$

or $B(f_n(x), \frac{\varepsilon}{3})$ est un voisinage de $f_n(x)$. et f_n est continue donc $f_n^{-1}(B(f_n(x), \frac{\varepsilon}{3}))$ est un voisinage de x. Donc $f^{-1}(U)$ inclus un voisinage de x donc est un voisinage de x et donc f est continue en x

8) Le raisonnement fait dans les questions précédente est valable pour tout x donc f est continue sur X tout entier donc $f \in F$

On a monter que toute suite de Cauchy dans F est convergente donc que F est complet

Ex5:

1) Le point 3 est problématique: la linéarité de f et les caractères fermé et borné de B ne permettent pas de conclure que f est bornée sur B.

2) L'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ de l'exercice 2.
$P \mapsto P'$
fournit un contre exemple.