

TOPOLOGIE MÉTRIQUE – INTERROGATION ÉCRITE 3 – PRINTEMPS 2026

120 MINUTES – 21 MAI 2026

Les dispositifs communicants (téléphones, montres connectées, etc.) sont interdits ainsi que tous les documents.

Exercice 1. Énoncer le théorème de compacité de Riesz.

Exercice 2. On considère l'espace $\mathbb{R}[X]$ et l'application $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\left\| \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \right\|_\infty = \sup\{|a_i|, i \in \mathbb{N}\}.$$

- Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie et que c'est une norme.
- Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = (X + 1)P$ est continue et calculer $\|\varphi\|$.
- Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $\psi(P) = P'$ n'est pas continue.

Exercice 3. Soient (X, \mathcal{T}) un espace topologique et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

- (1) Montrer que si pour tout n , A_n est connexe, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe.
- (2) Montrer que si pour tout n , A_n est connexe par arc, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe arc.

Exercice 4. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. On considère le sous-espace vectoriel de E^X :

$$F := C_b^0(X, E) = \{f : X \rightarrow E, f \text{ continue et bornée}\}$$

que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Le but de cet exercice est de montrer que F est complet. On se donne donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

- (1) Montrer que l'on peut définir $f \in E^X$ telle que pour tout x , $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2) Montrer que la fonction f est bornée.
- (3) Montrer que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans E^X muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour la suite des questions, on fixe un $x \in X$, on va tenter de montrer que f est continue en x .

- (4) Que signifie qu'une partie U de E est un voisinage de $f(x)$?
- (5) Que signifie que f est continue en x ? (On rappelle que X n'est pas un espace métrique).
- (6) On fixe $\epsilon > 0$ et un entier n tels que $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon/3$. Montrer que $f_n^{-1}(B(f_n(x), \epsilon/3)) \subseteq f_n^{-1}(B(f(x), \epsilon))$.
- (7) En déduire que f est continue en x .
- (8) Conclure.

Exercice 5. On va considérer une assertion (fausse) et une tentative démonstration de cette assertion.

- (1) Expliquer en quoi la démonstration est fausse.
Vous pouvez faire référence à la numérotation des arguments.
- (2) Donner un contre-exemple à l'assertion.

Assertion 1 (Fausse). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f: E \rightarrow E$ une application linéaire. Alors f est continue en 0_E .

Démonstration.

1. Il suffit de démontrer que f est séquentiellement continue en 0_E .
2. On se donne donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0_E et on souhaite montrer que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(0_E) = 0_E$.
3. Notons $B := \overline{B}(0_E, 1)$ la boule unité fermée centrée en 0_E . Comme f est linéaire et que B est un fermé borné, f est bornée sur B .
4. Notons donc $M > 0$ un majorant de $\|f\|$ sur B . On a alors, pour tout $x \in E$:

$$\|x\| \leq 1 \implies \|f(x)\| \leq M.$$

5. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_n)\| \leq \|x_n\| M$. Si $x_n = 0$, les deux cotés de l'inégalité sont égaux à 0 et elle est donc satisfaite.
6. Sinon, on a :

$$\|f(x_n)\| = \left\| f\left(\|x_n\| \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right\| = \|x_n\| \left\| f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right\| \leq \|x_n\| M.$$

7. La dernière inégalité vient du fait que $\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} = 1$ et donc $\frac{x_n}{\|x_n\|} \in B$.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|f(x_n)\| \leq \|x_n\| M$, et $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\|f(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
9. Donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0_E$. Et donc f est continue en 0_E . □