

TABLE DES MATIÈRES

1. Espaces métriques	1
1.1. Définitions élémentaires	1
1.2. Ouverts, fermés, voisinages	2
1.3. Adhérence, intérieur	3
1.4. Continuité	3
1.5. Équivalence des distances	4
1.6. Produits d'espaces métriques	4
1.7. Compacité	4
1.8. Complétude	5

Je m'excuse par avance pour les erreurs et coquilles qui se glisseront inévitablement dans ce document. Pour les signaler, ou pour toute autre remarque ou commentaire, veuillez m'envoyer un mail à l'adresse : louis-hadrien.robert@uca.fr.

1. ESPACES MÉTRIQUES

1.1. Définitions élémentaires.

DÉFINITION 1.1.1. Soit X un ensemble. Une *distance*¹ sur X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les axiomes suivants :

- (1) (Séparation) pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- (2) (Symétrie) pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- (3) (Inégalité triangulaire) pour tout $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un *espace métrique* est un couple (X, d) , où X est un ensemble et d est une métrique sur X (on omettra parfois de nommer la distance). Les éléments de X sont souvent appelé *points*. $\circ$

PROPOSITION 1.1.2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $\|\cdot\|$ une norme sur E , alors l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E (et donc sur tout sous-ensemble de E). $\circ$

EXEMPLE 1.1.3.(1) La Proposition 1.1.2 nous fournit beaucoup d'exemples. Nous nous intéresseront aux espace vectoriels normés plus avant dans la Section ??.

- (2) Si X est un ensemble, on peut considérer l'application

$$d_{\text{dis}}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut montrer que c'est une distance. On l'appelle distance *discrète* sur X .

- (3) Si $G = (V, E)$ est un graphe connexe (c'est à dire qu'il existe un chemin reliant toute paire de points). On peut définir une d distance sur V en définissant $d(v_1, v_2)$ comme étant la longueur du plus court chemin entre v_1 et v_2 .
- (4) Si (X, d) est un espace métrique, alors $(X, \frac{d}{1+d})$ est un espace métrique.
- (5) Si (X, d) et (X', d') sont des espaces métriques alors les applications

$$\begin{aligned} d_1: (X \times X')^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x, x'), (y, y')) &\mapsto d(x, y) + d'(x', y') \quad , \\ d_2: (X \times X')^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x, x'), (y, y')) &\mapsto \sqrt{(d(x, y))^2 + (d'(x', y'))^2} \quad \text{et} \\ d_\infty: (X \times X')^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x, x'), (y, y')) &\mapsto \max(d(x, y), d'(x', y')) \end{aligned}$$

sont des distances sur $X \times X'$.

- (6) Si $(X_i, d_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces métriques telle que toutes les distances soient majorées par un réel M (ne dépendant pas de i). Alors, en notant $X = \prod_{i \in I} X_i$, l'application

$$d_\infty: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \sup\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\}$$

1. Plus rarement une *métrique*.

est une distance sur X .

DÉFINITION 1.1.4. Soit (X, d) un espace métrique, $\ell \in X$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite u converge ou tend vers ℓ (pour d) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\epsilon) \implies d(u_n, \ell) \leq \epsilon.$$

Remarque 1.1.5.(1) En prenant $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $d(x, y) = |x - y|$ on retrouve la définition habituel.

(2) Toute suite extraite d'une suite convergente est aussi convergente vers la même limite.

EXERCICE 1.1.6. "Inventer" la définition de suite de Cauchy dans un espace métrique.

PROPOSITION 1.1.7 (Unicité de la limite). Si $u \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$.

DÉFINITION 1.1.8. Une valeur d'adhérence d'une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ est la limite d'une sous-suite de u .

DÉFINITION 1.1.9. Soit (X, d) un espace métrique, x un point de X et r un strictement positif. La boule (ouverte) de centre x et de rayon r est le sous-ensemble $B(x, r)$ de X définit par :

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}.$$

La boule fermée de centre x et de rayon r est le sous-ensemble $B_f(x, r)$ de X définit par :

$$B_f(x, r) = \{y \in X | d(x, y) \leq r\}.$$

Les boules unités (ouvertes et fermées) sont les boules avec $r = 1$.

DÉFINITION 1.1.10. Une partie A de X est bornée, si elle est contenue dans une boule fermée. Si A est une partie bornée non-vide, on appelle diamètre de A la quantité :

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Remarque 1.1.11. Pour montrer que $\text{diam}(A)$ est bien défini, il faut montrer que le caractère borné de A implique que l'ensemble $\{d(x, y) | x, y \in A\}$ est majorée.

EXERCICE 1.1.12. Dessiner les boules unités centrées en 0 pour les distances issues des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$. Quels sont leurs diamètres ? Est-ce un fait général pour les boules dans les espaces vectoriel normés ?

1.2. Ouverts, fermés, voisinages. Dans le reste de cette section, (X, d) désigne un espace métrique et x un élément de X .

DÉFINITION 1.2.1. Une partie $A \subseteq X$ est un voisinage de x , s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$. L'ensemble des voisinages de x pour la distance d est noté $\mathcal{V}_d(x)$ ou simplement $\mathcal{V}(x)$.

Une partie $O \subseteq X$ est ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, autrement dit si pour tout $y \in O$, il existe $r_y > 0$ tel que $B(y, r_y) \subseteq O$. L'ensemble des ouverts pour la distance d , est noté $\mathcal{O}_d$ ou simplement $\mathcal{O}$.

Une partie $F \subseteq X$ est fermée si l'ensemble $X \setminus F$ est ouvert. L'ensemble des fermés pour la distance d , est noté $\mathcal{F}_d$ ou simplement $\mathcal{F}$.

LEMME 1.2.2. Dans un espace métrique,

- (1) les boules ouvertes sont ouvertes ;
- (2) les boules fermées sont fermées ;
- (3) tout ouvert est réunion de boules ouvertes ;
- (4) tout singleton est fermé.

Remarque 1.2.3.(1) L'ensemble X est voisinage de tous ses points. Ainsi X et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

- (2) En générale, il existe de nombreuses parties de X qui ne sont ni fermées ni ouvertes. Autrement dit, les parties de X ne se comportent pas comme des portes, ce n'est pas parce qu'une partie n'est pas ouverte qu'elle est fermée (et réciproquement, et inversement).
- (3) Pour la distance discrète, toutes les parties de X sont ouvertes (et fermées).

PROPOSITION 1.2.4 (Opérations sur les ouverts).

- (O1) Une union quelconque d'ouverts est ouverte.
- (O2) Une intersection finie d'ouverts est ouverte.

Remarque 1.2.5. Anticipant sur la suite, il peut être opportun d'ajouter à ces deux opérations le fait que X et $\emptyset$ sont ouverts. Cela étant, ceci peut se "dédire" de la convention raisonnable qu'une union vide est égale à $\emptyset$ et qu'une intersection vide est finie et égale à X tout entier.

COROLLAIRE 1.2.6 (Opérations sur les fermés).

- (F1) Une union finie de fermés est fermée.
- (F2) Une intersection quelconque de fermés est fermée.

COROLLAIRE 1.2.7 (Opérations sur les voisinages).

- (V1) Si U est un voisinage de x et $U \subseteq V$ V est un voisinage de x .
- (V2) Une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x .
- (V3) Tout voisinage de x inclus une partie A qui contient x et qui est voisinage de chacun de ses points².

LEMME 1.2.8 (Reformulation de la limite de suite). Une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N) \implies u_n \in V(x).$$

². Autrement dit, un voisinage de x contient un ouvert qui contient x . Il est cependant notable que l'on peut exprimer cette propriété sans parler d'ouverts.

1.3. Adhérence, intérieur.

DÉFINITION 1.3.1. Soit A une partie de X . L'union de tous les ouverts inclus dans A est appelée l'intérieure de A et est notée $\overset{\circ}{A}$. L'intersection de tous les fermés contenant A est appelée l'adhérence de A et est notée $\bar{A}$. ○

LEMME 1.3.2. Pour toute partie A de X , on a $\overline{X \setminus \bar{A}} = X \setminus \overset{\circ}{A}$ et $\widehat{X \setminus \bar{A}} = X \setminus \bar{A}$. ○

LEMME 1.3.3. L'intérieure de A est le plus grand ouvert inclus dans A .
L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A . ○

COROLLAIRE 1.3.4. Une partie A de X est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

Une partie A de X est fermée si et seulement si $\bar{A} = A$.

Une partie A de X est un voisinage de x si et seulement si $x \in \overset{\circ}{A}$. ○

COROLLAIRE 1.3.5. Les opérations $\overset{\circ}{\cdot}$ et $\bar{\cdot}$ sont croissantes : si $A \subseteq B$, $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ et $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. ○

PROPOSITION 1.3.6. Pour tout $r > 0$ et tout $x \in X$, on a :

$$\overline{B(x, r)} \subseteq B_f(x, r) \quad \text{et} \quad B(x, r) \subseteq \widehat{B_f(x, r)}. \quad \circ$$

Remarque 1.3.7. Les inclusions réciproques ne sont pas toujours vraies. ○

PROPOSITION 1.3.8. Soit A une partie de X et $x \in X$, on a :

- (1) $x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A$;
- (2) $x \in \bar{A} \iff \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$;
- (3) $x \in \bar{A} \iff \exists u \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. ○

COROLLAIRE 1.3.9 (Caractérisation séquentielle des fermés). Soit A une partie de X . L'ensemble A est fermé dans X si et seulement si A contient toute les limites des suites de $A^{\mathbb{N}}$ convergentes. ○

COROLLAIRE 1.3.10. Dans $\mathbb{R}$, toute partie fermée, non-vide et bornée contient ses bornes inférieure et supérieure. ○

PROPOSITION 1.3.11. Si A est bornée, $\bar{A}$ l'est aussi et ces deux ensembles ont même diamètre. ○

DÉFINITION 1.3.12. Soient $A \subseteq B$ deux parties de X . On dit que A est dense dans B si $B \subseteq \bar{A}$. ○

EXEMPLE 1.3.13. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. ○

LEMME 1.3.14. Soient $A \subseteq B$ deux parties de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'ensemble A est dense dans B ;
- (ii) toute boule ouverte centrée en un point de B contient un point de A ;
- (iii) pour tout $x \in B$, il existe une suite d'éléments de A qui tend vers x . ○

1.4. Continuité.

Rappel 1.4.1. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application et B est une partie de Y , $f^{-1}(B)$ désigne le sous-ensemble de X défini par :

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Si A est une partie de X , $f(A)$ désigne la partie de Y définie par :

$$f(A) := \{y \in Y | \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &\subseteq B, & f^{-1}(f(A)) &\supseteq A \\ f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2), & f(A_1 \cap A_2) &\subseteq f(A_1) \cap f(A_2), \\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), & f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \\ \text{et} & & f^{-1}(Y \setminus B) &= X \setminus f^{-1}(B). \end{aligned} \quad \circ$$

Dans la suite de cette section (Y, d') désigne un espace métrique.

DÉFINITION 1.4.2. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application et x_0 un point de X . On dit que f est continue en x_0 , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x \in X, (d(x, x_0) < \delta_\epsilon) \implies d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

On dit que f est continue sur X (ou simplement continue) si f est continue en x pour tout $x \in X$ (cela vaut par restriction pour une partie de X). ○

Remarque 1.4.3. Si X est muni de la distance discrète, toute application $f: X \rightarrow Y$ est continue (il suffit de prendre $\delta_\epsilon = \frac{1}{2}$). ○

On a la caractérisation séquentielle habituelle :

LEMME 1.4.4 (Caractérisation séquentielle de la continuité). Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue en x_0 si pour toute suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ tendant vers x_0 , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x_0)$. ○

PROPOSITION 1.4.5 (Caractérisation vicinale de la continuité). Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue en x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 . ○

PROPOSITION 1.4.6. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est continue.
- (ii) L'image réciproque par f de tout ouvert est ouverte.
- (iii) L'image réciproque par f de tout fermé est fermée. ○

DÉFINITION 1.4.7. Soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction. On dit qu'elle est uniformément continue sur X , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, (d(x_1, x_2) \leq \delta_\epsilon) \implies d'(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon. \quad \circ$$

DÉFINITION 1.4.8. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, on dit qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est *k-lipschitzienne* ou *k-Lipschitz* si pour tout $x, x' \in X$, $d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd'(x_1, x_2)$. On dit qu'une application est *lipschitzienne* ou *Lipschitz* si elle est k-Lipschitz pour un certain $k \geq 0$. $\circ$

PROPOSITION 1.4.9. *Tout application lipschitzienne est uniformément continue.* $\circ$

Remarque 1.4.10. Une fonction uniformément continue sur X est continue sur X . L'inverse n'est pas forcément vrai (voir cependant 1.7.11).

Le caractère uniforme parle vraiment de la métrique est pas uniquement des voisinages, il n'y a donc pas de caractérisation vicinale de l'uniforme continuité. $\circ$

DÉFINITION 1.4.11. Une application $f: X \rightarrow Y$ est un *homéomorphisme* si f est continue, bijective et que sa fonction réciproque $f^{-1}: Y \rightarrow X$ est elle aussi continue. $\circ$

EXEMPLE 1.4.12. L'application identité de $\mathbb{R}$ munis de la distance discrète vers $\mathbb{R}$ munis de la distance usuelle n'est pas un homéomorphisme. $\circ$

1.5. Équivalence des distances. Il existe diverse notions d'équivalence pour les distances.

DÉFINITION 1.5.1. Soient X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X . On dit que les distance d_1 et d_2 sont

- *topologiquement équivalente* si l'application identité induit un homéomorphisme entre (X, d_1) et (X, d_2) ;
- *uniformément équivalentes* si les applications identités sont uniformément continues de (X, d_1) dans (X, d_2) et de (X, d_2) dans (X, d_1) ;
- *Lipschitz-équivalente* si les applications identités sont lipschitzienne de (X, d_1) dans (X, d_2) et de (X, d_2) dans (X, d_1) ; $\circ$

PROPOSITION 1.5.2.(1) *Chacune de ces notions induit une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur un espace donné.*

(2) *On a les implications suivantes : Lipschitz-équivalence $\implies$ équivalence uniforme $\implies$ équivalence topologique.* $\circ$

PROPOSITION 1.5.3. *Soient d_1 et d_2 deux distances sur X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes ;*
- (ii) *les distances d_1 et d_2 définissent les mêmes ouverts de X ;*
- (iii) *les distances d_1 et d_2 définissent les mêmes suites convergentes ;*
- (iv) *les distances d_1 et d_2 définissent les mêmes applications continues ;* $\circ$

Remarque 1.5.4. Attention : l'équivalence topologique ne définit pas les mêmes ensembles bornés. $\circ$

PROPOSITION 1.5.5. *Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, alors les distances d_1 , d_2 et d_∞ sur $X \times X'$ comme définies dans l'Exemple 1.1.3.(5) sont Lipschitz-équivalentes.* $\circ$

1.6. Produits d'espaces métriques. On munit $X \times Y$ d'une des trois métrique décrite dans l'Exemple 1.1.3.(5).

PROPOSITION 1.6.1. *Les deux projections $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ et $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ définies par $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$ sont continues.*

Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, alors les applications $\iota_1: X \rightarrow X \times Y$ et $\iota_1: X \rightarrow X \times Y$ $\circ$

LEMME 1.6.2. *Soit A une partie de X et B une partie de Y toutes deux non-vides. Alors :*

- *L'ensemble $A \times B$ est ouvert dans $X \times Y$ si et seulement si A et B sont ouverts.*
- *L'ensemble $A \times B$ est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si A et B sont fermés.* $\circ$

Remarque 1.6.3. Il existe de nombreux ouverts (et fermé) de $X \times Y$ qui ne sont pas de la forme $A \times B$. $\circ$

PROPOSITION 1.6.4. *Une suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace produit $X \times Y$ est convergente si et seulement si les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément (dans X et dans Y).* $\circ$

PROPOSITION 1.6.5. *Soit Z un espace métrique, $f: Z \rightarrow X$ et $g: Z \rightarrow Y$ deux applications. Pour que l'application $(f, g): Z \rightarrow X \times Y$ soit continue en un point $z \in Z$ il faut et il suffit que f et g soient continues en z .* $\circ$

PROPOSITION 1.6.6. *Soit $f: X \times Y \rightarrow Z$ une application continue entre espaces métriques. Alors*

- *pour tout $x \in X$, l'application partielle de Y dans Z définie par $y \mapsto f(x, y)$ est continue ;*
- *pour tout $y \in Y$, l'application partielle de X dans Z définie par $x \mapsto f(x, y)$ est continue.* $\circ$

EXEMPLE 1.6.7. La réciproque à cette proposition est fausse comme le montre la fonction

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad \circ$$

Remarque 1.6.8. Les propositions précédentes se généralisent bien sûr à tout produit fini $\circ$

1.7. Compacité.

DÉFINITION 1.7.1. Une partie A de X est *séquentiellement compacte* si de toute suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite convergente vers un élément de A . $\circ$

Remarque 1.7.2. Autrement dit, dans une partie séquentiellement compacte, toute suite admet une valeur d'adhérence. Parfois la compacité séquentielle est appelé la compacité selon Bolzano–Weierstraß. $\circ$

LEMME 1.7.3. Une partie A de X est séquentiellement compacte si pour toute suite (u_n) d'éléments de A , il existe un $x \in A$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid d(u_n, x) < \epsilon\}$ est infini. $\circ$

EXEMPLE 1.7.4. Le théorème de Bolzano–Weierstraß nous indique que les intervalles fermés bornés sont séquentiellement compacts dans $\mathbb{R}$ (munis de la distance venant de $|\cdot|$). $\circ$

PROPOSITION 1.7.5. Si une partie A est séquentiellement compacte, alors elle est fermée et bornée. $\circ$

DÉFINITION 1.7.6. Soit A une partie de X . Un recouvrement d'ouverts de A est une collection $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X telle que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. $\circ$

LEMME 1.7.7. Si A est séquentiellement compacte et $(O_i)_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouverts de A , alors il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in A$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, \rho) \subseteq O_{i(x)}$. $\circ$

DÉFINITION 1.7.8. Une partie A de X est compacte si de tout recouvrement d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$, on peut extraire un recouvrement fini. C'est-à-dire, qu'il existe J un sous-ensemble fini de I tel que $A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$. $\circ$

Remarque 1.7.9. Cette définition de la compacité est souvent appelée “propriété de Borel–Lebesgue”. $\circ$

THÉORÈME 1.7.10. Dans un espace métrique, une partie A est compacte si et seulement si A est séquentiellement compacte. $\circ$

THÉORÈME 1.7.11 (Heine). Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue sur X . $\circ$

1.8. Complétude.

PROPOSITION 1.8.1.(1) Toute suite convergente est de Cauchy.

(2) Toute suite de Cauchy est bornée.

(3) Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est elle-même de Cauchy.

(4) Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge (vers cette valeur d'adhérence). $\circ$

DÉFINITION 1.8.2. On dit que X est complet si toute suite de Cauchy converge. On étend évidemment la notion à une partie d'un espace métrique (pour la métrique induite). $\circ$

EXEMPLE 1.8.3. Muni de la distance usuelle, l'espace métrique $\mathbb{R}$ est complet.

Tout espace métrique fini est complet. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie complète de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est une partie complète de $\mathbb{R}$. $\circ$

PROPOSITION 1.8.4. L'image d'une suite de Cauchy par une fonction uniformément continue est de Cauchy. $\circ$

LEMME 1.8.5.(1) Une partie complète de X est fermée.

(2) Si X est complet, toute partie fermée est complète.

(3) La réunion d'un nombre fini de parties complètes est complète.

(4) L'intersection d'une famille quelconque de parties complètes est complète. $\circ$

DÉFINITION 1.8.6. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de X est emboîtée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$. $\circ$

PROPOSITION 1.8.7. L'espace (X, d) est complet si et seulement si pour toute suite emboîtée de fermées non-vides $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. $\circ$

Remarque 1.8.8. On obtient immédiatement que si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ alors c'est un singleton. $\circ$

PROPOSITION 1.8.9. Le produit de deux espaces métriques X et Y non-vides (muni par exemple de la distance d_∞) est complet si et seulement si X et Y le sont. $\circ$

THÉORÈME 1.8.10 (Point fixe de Picard). Soit $f: X \rightarrow X$ une application k -Lipschitz. Si $k < 1$ et si X est complet alors f admet un unique point fixe a . De plus, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d(f^n(x), a) \leq k^n d(x, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

On va maintenant voir deux applications du théorème de point fixe de Picard.

THÉORÈME 1.8.11 (Cauchy–Lipschitz). Soient $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un ouvert, $(t_0, y_0) \in U$ et $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue en la première variable et localement Lipschitz en les autres. Alors il existe $\epsilon > 0$ et une unique fonction $y: [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 telle que pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$. $\circ$

THÉORÈME 1.8.12 (Inversion locale). Soient E, F des espaces de Banach (i.e. espaces vectoriels normés complets), $U \subseteq E$ un ouvert, x_0 un point de U et $f: U \rightarrow F$ une fonction de classe C^1 . Si la différentielle de f en x_0 est une bijection continue de E dans F alors il existe un ouvert $V \subseteq U$ contenant x_0 tel que $f|_V: V \rightarrow f(V)$ soit un difféomorphisme de classe C^1 . $\circ$

Email address: louis-hadrien.robert@uca.fr