

TABLE DES MATIÈRES

1. Espaces métriques	1
1.1. Définitions élémentaires	1
1.2. Ouverts, fermés, voisinages	2
1.3. Adhérence, intérieur	3
1.4. Continuité	3
1.5. Équivalence des distances	4
1.6. Produits d'espaces métriques	4
1.7. Compacité	4
1.8. Complétude	5
2. Espaces topologiques	6
2.1. Définitions élémentaires	6
2.2. Axiomes de séparation	6
2.3. Bases et Prébases	7
2.4. Topologies initiales	7
2.5. Produits d'espaces topologiques	7
2.6. Connexité	8
2.7. Compacité	8

Je présente par avance mes excuses pour les erreurs et coquilles qui se glisseront inévitablement dans ce document. Pour les signaler, ou pour toute autre remarque ou commentaire, veuillez m'envoyer un mail à l'adresse : louis-hadrien.robert@uca.fr.

1. ESPACES MÉTRIQUES

1.1. Définitions élémentaires.

DÉFINITION 1.1.1. Soit X un ensemble. Une *distance*¹ sur X est une application $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les axiomes suivants :

- (1) (Séparation) pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- (2) (Symétrie) pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- (3) (Inégalité triangulaire) pour tout $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un *espace métrique* est un couple (X, d) , où X est un ensemble et d est une métrique sur X (on omettra parfois de nommer la distance). Les éléments de X sont souvent appelé *points*. ○

PROPOSITION 1.1.2. Soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel, et $\| \cdot \|$ une norme sur E , alors l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E (et donc sur tout sous-ensemble de E). ○

EXEMPLE 1.1.3.(1) La Proposition 1.1.2 nous fournit beaucoup d'exemples. Nous nous intéresseront aux espace vectoriels normés plus avant dans la Section ??.

- (2) Si X est un ensemble, on peut considérer l'application

$$d_{\text{dis}}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut montrer que c'est une distance. On l'appelle distance *discrète* sur X .

- (3) Si $G = (V, E)$ est un graphe connexe (c'est à dire qu'il existe un chemin reliant toute paire de points). On peut définir une d distance sur V en définissant $d(v_1, v_2)$ comme étant la longueur du plus court chemin entre v_1 et v_2 .
- (4) Si (X, d) est un espace métrique, alors $(X, \frac{d}{1+d})$ est un espace métrique.
- (5) Si (X, d) et (X', d') sont des espaces métriques alors les applications

$$d_1: \begin{array}{l} (X \times X')^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x, x'), (y, y')) \mapsto d(x, y) + d'(x', y') \end{array} \quad , \\ d_2: \begin{array}{l} (X \times X')^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x, x'), (y, y')) \mapsto \sqrt{(d(x, y))^2 + (d'(x', y'))^2} \end{array} \quad \text{et} \\ d_\infty: \begin{array}{l} (X \times X')^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ ((x, x'), (y, y')) \mapsto \max(d(x, y), d'(x', y')) \end{array}$$

sont des distances sur $X \times X'$.

- (6) Si $(X_i, d_i)_{i \in I}$ est un famille d'espaces métriques telle que toutes les distances soient majorées par un réel M (ne dépendant pas de i). Alors, en notant $X = \prod_{i \in I} X_i$, l'application

$$d_\infty: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto \sup\{d_i(x_i, y_i) \mid i \in I\}$$

1. Plus rarement une *métrique*.

est une distance sur X . ○

DÉFINITION 1.1.4. Soit (X, d) un espace métrique, $\ell \in X$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite u converge ou tend vers ℓ (pour d) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\epsilon) \implies d(u_n, \ell) \leq \epsilon. \quad \circ$$

Remarque 1.1.5.(1) En prenant $X = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $d(x, y) = |x - y|$ on retrouve la définition habituel.

(2) Toute suite extraite d'une suite convergeante est aussi convergeante vers la même limite. ○

EXERCICE 1.1.6. "Inventer" la définition de suite de Cauchy dans un espace métrique. ○

PROPOSITION 1.1.7 (Unicité de la limite). Si $u \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$. ○

DÉFINITION 1.1.8. Une valeur d'adhérence d'une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ est la limite d'une sous-suite de u . ○

DÉFINITION 1.1.9. Soit (X, d) un espace métrique, x un point de X et r un strictement positif. La boule (ouverte) de centre x et de rayon r est le sous-ensemble $B(x, r)$ de X définit par :

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}.$$

La boule fermée de centre x et de rayon r est le sous-ensemble $B_f(x, r)$ de X définit par :

$$B_f(x, r) = \{y \in X | d(x, y) \leq r\}.$$

Les boules unités (ouvertes et fermées) sont les boules avec $r = 1$. ○

DÉFINITION 1.1.10. Une partie A de X est bornée, si elle est contenue dans une boule fermée. Si A est une partie bornée non-vide, on appelle diamètre de A la quantité :

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}. \quad \circ$$

Remarque 1.1.11. Pour montrer que $\text{diam}(A)$ est bien défini, il faut montrer que le caractère borné de A implique que l'ensemble $\{d(x, y) | x, y \in A\}$ est majorée. ○

EXERCICE 1.1.12. Dessiner les boules unités centrées en 0 pour les distances issues des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$. Quels sont leurs diamètres ? Est-ce un fait général pour les boules dans les espaces vectoriel normés ? ○

1.2. Ouverts, fermés, voisinages. Dans le reste de cette section, (X, d) désigne un espace métrique et x un élément de X .

DÉFINITION 1.2.1. Une partie $A \subseteq X$ est un voisinage de x , s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$. L'ensemble des voisinages de x pour la distance d est noté $\mathcal{V}_d(x)$ ou simplement $\mathcal{V}(x)$.

Une partie $O \subseteq X$ est ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, autrement dit si pour tout $y \in O$, il existe $r_y > 0$ tel que $B(y, r_y) \subseteq O$. L'ensemble des ouverts pour la distance d , est noté \mathcal{O}_d ou simplement \mathcal{O} .

Une partie $F \subseteq X$ est fermée si l'ensemble $X \setminus F$ est ouvert. L'ensemble des fermés pour la distance d , est noté \mathcal{F}_d ou simplement \mathcal{F} . ○

LEMME 1.2.2. Dans un espace métrique,

- (1) les boules ouvertes sont ouvertes ;
- (2) les boules fermées sont fermées ;
- (3) tout ouvert est réunion de boules ouvertes ;
- (4) tout singleton est fermé. ○

Remarque 1.2.3.(1) L'ensemble X est voisinage de tous ses points. Ainsi X et \emptyset sont à la fois ouvert et fermé.

- (2) En générale, il existe de nombreuses parties de X qui ne sont ni fermées ni ouvertes. Autrement dit, les parties de X ne se comportent pas comme des portes, ce n'est pas parce qu'une partie n'est pas ouverte qu'elle est fermée (et réciproquement, et inversement).
- (3) Pour la distance discrète, toutes les parties de X sont ouvertes (et fermées). ○

PROPOSITION 1.2.4 (Opérations sur les ouverts).

- (O1) Une union quelconque d'ouverts est ouverte. ○
- (O2) Une intersection finie d'ouverts est ouverte. ○

Remarque 1.2.5. Anticipant sur la suite, il peut être opportun d'ajouter à ces deux opérations le fait que X et \emptyset sont ouverts. Cela étant, ceci peut se "déduire" de la convention raisonnable qu'une union vide est égale à \emptyset et qu'une intersection vide est finie et égale à X tout entier. ○

COROLLAIRE 1.2.6 (Opérations sur les fermés).

- (F1) Une union finie de fermés est fermée.
- (F2) Une intersection quelconque de fermés de est fermée. ○

COROLLAIRE 1.2.7 (Opérations sur les voisinages).

- (V1) Si U est un voisinage de x et $U \subseteq V$, V est un voisinage de x .
- (V2) Une intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x .
- (V3) Tout voisinage de x inclus une partie A qui contient x et qui est voisinage de chacun de ses points². ○

LEMME 1.2.8 (Reformulation de la limite de suite). Une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N) \implies u_n \in V(x). \quad \circ$$

² Autrement dit, un voisinage de x contient un ouvert qui contient x . Il est cependant notable que l'on peut exprimer cette propriété sans parler d'ouverts.

1.3. Adhérence, intérieur.

DÉFINITION 1.3.1. Soit A une partie de X . L'union de tous les ouverts inclus dans A est appelée l'intérieure de A et est notée $\overset{\circ}{A}$. L'intersection de tous les fermés contenant A est appelée l'adhérence de A et est notée \bar{A} . ○

LEMME 1.3.2. Pour toute partie A de X , on a $\overline{X \setminus \bar{A}} = X \setminus \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{X \setminus \bar{A}} = X \setminus \bar{A}$. ○

LEMME 1.3.3. L'intérieure de A est le plus grand ouvert inclus dans A .
L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A . ○

COROLLAIRE 1.3.4. Une partie A de X est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.
Une partie A de X est fermée si et seulement si $\bar{A} = A$.
Une partie A de X est un voisinage de x si et seulement si $x \in \overset{\circ}{A}$. ○

COROLLAIRE 1.3.5. Les opérations $\overset{\circ}{\cdot}$ et $\bar{\cdot}$ sont croissantes : si $A \subseteq B$, $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ et $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. ○

PROPOSITION 1.3.6. Pour tout $r > 0$ et tout $x \in X$, on a :

$$\overline{B(x, r)} \subseteq B_f(x, r) \quad \text{et} \quad B(x, r) \subseteq \overline{B_f(x, r)}. \quad \circ$$

Remarque 1.3.7. Les inclusions réciproques ne sont pas toujours vraies. ○

PROPOSITION 1.3.8. Soit A une partie de X et $x \in X$, on a :

- (1) $x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A$;
- (2) $x \in \bar{A} \iff \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$;
- (3) $x \in \bar{A} \iff \exists u \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. ○

COROLLAIRE 1.3.9 (Caractérisation séquentielle des fermés). Soit A une partie de X . L'ensemble A est fermé dans X si et seulement si A contient toute les limites des suites de $A^{\mathbb{N}}$ convergeantes. ○

COROLLAIRE 1.3.10. Dans \mathbb{R} , toute partie fermée, non-vide et bornée contient ses bornes inférieure et supérieure. ○

PROPOSITION 1.3.11. Si A est bornée, \bar{A} l'est aussi et ces deux ensembles ont même diamètre. ○

DÉFINITION 1.3.12. Soient $A \subseteq B$ deux parties de X . On dit que A est dense dans B si $B \subseteq \bar{A}$. ○

EXEMPLE 1.3.13. Les ensembles \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} . ○

LEMME 1.3.14. Soient $A \subseteq B$ deux parties de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'ensemble A est dense dans B ;
- (ii) toute boule ouverte centrée en un point de B contient un point de A ;
- (iii) pour tout $x \in B$, il existe une suite d'éléments de A qui tend vers x . ○

1.4. Continuité.

Rappel 1.4.1. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application et B est une partie de Y , $f^{-1}(B)$ désigne le sous-ensemble de X défini par :

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Si A est une partie de X , $f(A)$ désigne la partie de Y définie par :

$$f(A) := \{y \in Y | \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &\subseteq B, & f^{-1}(f(A)) &\supseteq A \\ f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2), & f(A_1 \cap A_2) &\subseteq f(A_1) \cap f(A_2), \\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), & f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \\ \text{et} & & f^{-1}(Y \setminus B) &= X \setminus f^{-1}(B). \quad \circ \end{aligned}$$

Dans la suite de cette section (Y, d') désigne un espace métrique.

DÉFINITION 1.4.2. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application et x_0 un point de X . On dit que f est continue en x_0 , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x \in X, (d(x, x_0) < \delta_\epsilon) \implies d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

On dit que f est continue sur X (ou simplement continue) si f est continue en x pour tout $x \in X$ (cela vaut par restriction pour une partie de X). ○

Remarque 1.4.3. Si X est muni de la distance discrète, toute application $f: X \rightarrow Y$ est continue (il suffit de prendre $\delta_\epsilon = \frac{1}{2}$). ○

On a la caractérisation séquentielle habituelle :

LEMME 1.4.4 (Caractérisation séquentielle de la continuité). Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue en x_0 si pour toute suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ tendant vers x_0 , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x_0)$. ○

PROPOSITION 1.4.5 (Caractérisation vicinale de la continuité). Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue en x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 . ○

PROPOSITION 1.4.6. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est continue.
- (ii) L'image réciproque par f de tout ouvert est ouverte.
- (iii) L'image réciproque par f de tout fermé est fermée. ○

DÉFINITION 1.4.7. Soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction. On dit qu'elle est uniformément continue sur X , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, (d(x_1, x_2) \leq \delta_\epsilon) \implies d'(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon. \quad \circ$$

DÉFINITION 1.4.8. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, on dit qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est *k-lipschitzienne* ou *k-Lipschitz* si pour tout $x, x' \in X$, $d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd'(x_1, x_2)$. On dit qu'une application est *lipschitzienne* ou *Lipschitz* si elle est *k-Lipschitz* pour un certain $k \geq 0$. ○

PROPOSITION 1.4.9. *Tout application lipschitzienne est uniformément continue.* ○

Remarque 1.4.10. Une fonction uniformément continue sur X est continue sur X . L'inverse n'est pas forcément vrai (voir cependant 1.7.11).

Le caractère uniforme parle vraiment de la métrique est pas uniquement des voisinages, il n'y a donc pas de caractérisation vicinale de l'uniforme continuité. ○

DÉFINITION 1.4.11. Une application $f: X \rightarrow Y$ est un *homéomorphisme* si f est continue, bijective et que sa fonction réciproque $f^{-1}: Y \rightarrow X$ est elle aussi continue. ○

EXEMPLE 1.4.12. L'application identité de \mathbb{R} munis de la distance discrète vers \mathbb{R} munis de la distance usuelle n'est pas un homéomorphisme. ○

1.5. Équivalence des distances. Il existe diverse notions d'équivalence pour les distances.

DÉFINITION 1.5.1. Soient X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X . On dit que les distance d_1 et d_2 sont

- *topologiquement équivalente* si l'application identité induit un homéomorphisme entre (X, d_1) et (X, d_2) ;
- *uniformément équivalentes* si les applications identités sont uniformément continues de (X, d_1) dans (X, d_2) et de (X, d_2) dans (X, d_1) ;
- *Lipschitz-équivalente* si les applications identités sont lipschitzienne de (X, d_1) dans (X, d_2) et de (X, d_2) dans (X, d_1) ; ○

PROPOSITION 1.5.2.(1) *Chacune de ces notions induit une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur un espace donné.*

(2) *On a les implications suivantes : Lipschitz-équivalence \implies équivalence uniforme \implies équivalence topologique.* ○

PROPOSITION 1.5.3. *Soient d_1 et d_2 deux distances sur X . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes ;*
- (ii) *les distances d_1 et d_2 définissent les mêmes ouverts de X ;*
- (iii) *les distances d_1 et d_2 définissent les mêmes suites convergentes ;*
- (iv) *les distances d_1 et d_2 définissent les mêmes applications continues ;* ○

Remarque 1.5.4. Attention : l'équivalence topologique ne définit pas les mêmes ensembles bornés. ○

PROPOSITION 1.5.5. *Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, alors les distances d_1 , d_2 et d_∞ sur $X \times X'$ comme définies dans l'Exemple 1.1.3.(5) sont Lipschitz-équivalentes.* ○

1.6. Produits d'espaces métriques. On munit $X \times Y$ d'une des trois métrique décrite dans l'Exemple 1.1.3.(5).

PROPOSITION 1.6.1. *Les deux projections $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ et $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ définies par $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$ sont continues.*

Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, alors les applications $\iota_1 :: X \rightarrow X \times Y$ et $\iota_2 :: X \rightarrow X \times Y$ ○

LEMME 1.6.2. *Soit A une partie de X et B une partie de Y toutes deux non-vides. Alors :*

- *L'ensemble $A \times B$ est ouvert dans $X \times Y$ si et seulement si A et B sont ouverts.*
- *L'ensemble $A \times B$ est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si A et B sont fermés.* ○

Remarque 1.6.3. Il existe de nombreux ouverts (et fermé) de $X \times Y$ qui ne sont pas de la forme $A \times B$. ○

PROPOSITION 1.6.4. *Une suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace produit $X \times Y$ est convergente si et seulement si les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément (dans X et dans Y).* ○

PROPOSITION 1.6.5. *Soit Z un espace métrique, $f: Z \rightarrow X$ et $g: Z \rightarrow Y$ deux applications. Pour que l'application $(f, g): Z \rightarrow X \times Y$ soit continue en un point $z \in Z$ il faut et il suffit que f et g soient continues en z .* ○

PROPOSITION 1.6.6. *Soit $f: X \times Y \rightarrow Z$ une application continue entre espaces métriques. Alors*

- *pour tout $x \in X$, l'application partielle de Y dans Z définie par $y \mapsto f(x, y)$ est continue ;*
- *pour tout $y \in Y$, l'application partielle de X dans Z définie par $x \mapsto f(x, y)$ est continue.* ○

EXEMPLE 1.6.7. La réciproque à cette proposition est fausse comme le montre la fonction

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad \circ$$

Remarque 1.6.8. Les propositions précédentes se généralisent bien sûr à tout produit fini ○

1.7. Compacité.

DÉFINITION 1.7.1. Une partie A de X est *séquentiellement compacte* si de toute suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une suite convergente vers un élément de A . ○

Remarque 1.7.2. Autrement dit, dans une partie séquentiellement compacte, toute suite admet une valeur d'adhérence. Parfois la compacité séquentielle est appelé la compacité selon Bolzano–Weierstraß. ○

LEMME 1.7.3. *Une partie A est X est séquentiellement compacte si pour toute suite u d'élément de A , il existe un $x \in A$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} | d(u_n, x) < \epsilon\}$ est infini.* ○

EXEMPLE 1.7.4. Le théorème de Bolzano–Weierstraß nous indique que les intervalles fermés bornés sont séquentiellement compacts dans \mathbb{R} (munis de la distance venant de $|\cdot|$). ○

PROPOSITION 1.7.5. Si une partie A est séquentiellement compacte, alors elle est fermée et bornée. ○

DÉFINITION 1.7.6. Soit A une partie de X . Un recouvrement d'ouverts de A est une collection $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X telle que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. ○

LEMME 1.7.7. Si A est séquentiellement compacte et $(O_i)_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouverts de A , alors il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in A$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, \rho) \subseteq O_{i(x)}$. ○

DÉFINITION 1.7.8. Une partie A de X est compacte si de tout recouvrement d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$, on peut extraire un recouvrement fini. C'est-à-dire, qu'il existe J un sous-ensemble fini de I tel que $A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$. ○

Remarque 1.7.9. Cette définition de la compacité est souvent appelée “propriété de Borel–Lebesgue”. ○

THÉORÈME 1.7.10. Dans un espace métrique, une partie A est compacte si et seulement si A est séquentiellement compacte. ○

THÉORÈME 1.7.11 (Heine). Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue sur X . ○

1.8. Complétude.

PROPOSITION 1.8.1.(1) Toute suite convergente est de Cauchy. ○

(2) Toute suite de Cauchy est bornée. ○

(3) Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est elle-même de Cauchy. ○

(4) Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge (vers cette valeur d'adhérence). ○

DÉFINITION 1.8.2. On dit que X est complet si toute suite de Cauchy converge. On étend évidemment la notion à une partie d'un espace métrique (pour la métrique induite). ○

EXEMPLE 1.8.3. Muni de la distance usuelle, l'espace métrique \mathbb{R} est complet. ○

Tout espace métrique fini est complet. L'ensemble \mathbb{Q} n'est pas une partie complète de \mathbb{R} . L'ensemble \mathbb{Z} est une partie complète de \mathbb{R} . ○

PROPOSITION 1.8.4. L'image d'une suite de Cauchy par une fonction uniformément continue est de Cauchy. ○

LEMME 1.8.5.(1) Une partie complète de X est fermée. ○

(2) Si X est complet, toute partie fermée est complète. ○

(3) La réunion d'un nombre fini de parties complètes est complète. ○

(4) L'intersection d'une famille quelconque de parties complètes est complète. ○

DÉFINITION 1.8.6. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partie de X est emboîtée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$. ○

PROPOSITION 1.8.7. L'espace (X, d) est complet si et seulement si pour toute suite emboîtée de fermées non-vides $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. ○

Remarque 1.8.8. On obtient immédiatement que si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ alors c'est un singleton. ○

PROPOSITION 1.8.9. Le produit de deux espaces métriques X et Y non-vides (muni par exemple de la distance d_∞) est complet si et seulement si X et Y le sont. ○

THÉORÈME 1.8.10 (Point fixe de Picard). Soit $f: X \rightarrow X$ une application k -Lipschitz. Si $k < 1$ et si X est complet alors f admet un unique point fixe a . De plus, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d(f^n(x), a) \leq k^n d(x, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

○

On va maintenant voir deux applications du théorème de point fixe de Picard.

THÉORÈME 1.8.11 (Cauchy–Lipschitz). Soient $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un ouvert, $(t_0, y_0) \in U$ et $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue en la première variable et localement Lipschitz en les autres. Alors il existe $\epsilon > 0$ et une unique fonction $y: [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 telle que pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$. ○

THÉORÈME 1.8.12 (Inversion locale). Soient E, F des espaces de Banach (i.e. espaces vectoriels normés complets), $U \subseteq E$ un ouvert, x_0 un point de U et $f: U \rightarrow F$ une fonction de classe C^1 . Si la différentielle de f en x_0 est une bijection continue de E dans F alors il existe un ouvert $V \subseteq U$ contenant x_0 tel que $f|_V: V \rightarrow f(V)$ soit un difféomorphisme de classe C^1 . ○

2. ESPACES TOPOLOGIQUES

2.1. Définitions élémentaires.

DÉFINITION 2.1.1. Soit X un ensemble, une *topologie sur* X est une partie \mathcal{O} de $\mathcal{P}(X)$ qui satisfait les axiomes suivants :

- (O0) les ensemble \emptyset et X sont dans \mathcal{O} ;
- (O1) \mathcal{O} est stable par unions quelconques ;
- (O2) \mathcal{O} est stable par intersections finies³.

Un *espace topologique* est un couple (X, \mathcal{O}) où \mathcal{O} est une topologie sur X . Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les *ouverts* de X . Une partie A de X est *fermée*, si $X \setminus A$ est un ouvert. L'ensemble des fermées de X est souvent noté \mathcal{F} . Si $x \in X$, un *voisinage de* x est une partie de X qui inclut un ouvert qui contient x . L'ensemble des voisinage de x est noté $\mathcal{V}(x)$. ○

Remarque 2.1.2.(1) Si (X, d) est un espace métrique, l'ensemble \mathcal{O}_d des ouverts pour la distance d forment une topologie pour X (c'est le contenu de la Proposition 1.2.4). On dit que \mathcal{O}_d est la topologie *induite* par d . Les notions d'ouverts, de fermés, et de voisinages coïncident.

- (2) La plupart des notions de la Section 1 qui ne font pas référence à la distance peuvent être reprises directement ici : la *convergence de suite* (via le Lemme 1.2.8), l'*adhérence*, l'*intérieur*, la *continuité* et la *densité*.
- (3) Les notions de suites de Cauchy, de complétude, d'uniforme continuité ou le caractère lipschitzien n'ont pas d'analogues directs dans le contexte des espaces topologiques.
- (4) Dans le cadre des espaces métriques, on a vu deux notions (équivalentes) de compacité. Aucune de ces notions ne fait directement référence à la distance. Cela étant, la preuve de l'équivalence (Théorème 1.7.10) entre ces deux notions fait intervenir la distance de manière cruciale. Ainsi dans le cadre topologique cette équivalence n'est plus valable, il va donc falloir faire des choix. ○

EXEMPLE 2.1.3.(1) La remarque précédente donne de nombreux exemples de topologies.

- (2) Pour X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X (dite, topologie *discrète* ou topologie *fine*). C'est la topologie induite par la distance discrète.
- (3) Pour un X un ensemble, $\mathcal{O}_{\text{gro}} := \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X , dite topologie *grossière*. On constate dans ce dernier exemple, qu'il n'y a pas unicité de la limite des suites (avec la topologie grossière, toutes les suites tendent vers tous les points de X). ○

PROPOSITION 2.1.4. Si (X, \mathcal{O}) est un espace topologique et A est une partie de X , l'ensemble

$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$$

est une topologie sur A . ○

3. Intersection Finie d'Ouverts : IFO, comme "il faut s'en souvenir".

Remarque 2.1.5.(1) La topologie \mathcal{O}_A décrit dans la Proposition 2.1.4 s'appelle la *topologie trace* sur A . Lorsque que l'on considère une partie A d'un espace topologique X , on la munira systématiquement de cette topologie.

- (2) Il est important de bien préciser où l'on se place quand on dit qu'un ensemble est ouvert (ou fermé) : en effet toute partie A de X (pas forcément ouverte ou fermé dans X) est tautologiquement un ouvert (et un fermé) de A . ○

DÉFINITION 2.1.6. Un espace topologique (X, \mathcal{O}) (ou la topologie \mathcal{O}) est dit *métrisable* s'il existe une distance sur d sur X telle que \mathcal{O} soit induite par d . ○

EXEMPLE 2.1.7. Si X a au moins deux éléments, la topologie grossière n'est pas métrisable. ○

DÉFINITION 2.1.8. Soient X un ensemble et \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 deux topologies. On dit que \mathcal{O}_1 est *plus fine* que \mathcal{O}_2 si $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$. On dit aussi que \mathcal{O}_2 est *plus grossière* que \mathcal{O}_1 . ○

Remarque 2.1.9. La finesse sur l'ensemble des topologies sur un ensemble X est une relation d'ordre. La grossièreté aussi. ○

PROPOSITION 2.1.10. Soient X un ensemble et $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille de topologies sur X , alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$ est une topologie sur X . C'est la topologie la plus fine qui soit plus grossière que chacune des \mathcal{O}_i pour $i \in I$. ○

COROLLAIRE 2.1.11. Soit A une famille de parties de X . Il existe une topologie minimale (au sens de la finesse) contenant A . On l'appelle la topologie engendrée par A et on la note $\mathcal{T}(A)$. ○

2.2. Axiomes de séparation. Dans toute la suite, (X, \mathcal{O}) désigne un espace topologique.

Si deux points ont les mêmes voisinages pour une topologie donnée, ils sont d'une certaine manière indistinguable d'un point de vue topologique : on ne peut pas les "séparer" ce qui n'est pas très pratique. On peut choisir d'identifier les points qui ont les mêmes voisinages et travailler avec un espace quotient, on peut aussi choisir de ne pas considérer ces cas pathologiques. Pour cela on introduit des axiomes de séparations :

DÉFINITION 2.2.1. On dit que l'espace (X, \mathcal{O}) est

- $T0$ ou (de) *Kolmogorov* si pour tout $x \neq y \in X$, il existe un ouvert contenant x mais pas y ou un ouvert contenant y mais pas x .
- $T1$ ou (de) *Fréchet* ou *accessible* si pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est fermé.
- $T2$ ou (de) *Hausdorff* ou *séparé* si pour tout $x \neq y \in X$ il existe deux ouverts disjoints U et V contenant respectivement x et y . ○

Remarque 2.2.2. — Le T qui liste ces axiomes vient du terme allemand *Trennungssaxiom* qui signifie "axiome de séparation".

— Il existe d'autres axiomes de séparation, sont listés ici uniquement les plus courants. ○

PROPOSITION 2.2.3. On a les implications *métrisable* $\implies T2 \implies T1 \implies T0$ (mais aucune n'est une équivalence). ○

PROPOSITION 2.2.4. Si (X, \mathcal{O}) est de Fréchet alors on a unicité des limites de suites (la réciproque n'est pas vraie). \circ

PROPOSITION 2.2.5. Les trois axiomes de séparation se transmettent à toute parties d'un espace topologique (munie de la topologie trace). \circ

2.3. Bases et Prébases.

DÉFINITION 2.3.1.(1) Une sous-famille \mathcal{B} de \mathcal{O} est une base si tout ouvert s'écrit comme réunion d'éléments de \mathcal{B} .

(2) Une prébase \mathcal{B}' est une sous-famille de \mathcal{O} si la famille consistant en toutes les intersections finies d'éléments de \mathcal{B}' est une base de \mathcal{O} . \circ

Dans la définition précédente, on adopte la convention qu'une insteresection vide d'élément de \mathcal{B}' est une intersection finie et qu'elle est égale à X .

PROPOSITION 2.3.2. Une sous-famille \mathcal{B} de \mathcal{O} est une prébase, si et seulement si $\mathcal{O} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$. \circ

COROLLAIRE 2.3.3. Tout partie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est prébase d'une (unique) topologie : la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. \circ

LEMME 2.3.4. Une partie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une base (pour une topologie) si et seulement si $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ et pour tout $U, V \in \mathcal{B}$ et pour tout $x \in U \cap V$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $x \in W \subseteq U \cap V$. \circ

LEMME 2.3.5. Soit $f: (X, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}')$ une application et \mathcal{B} une prébase de \mathcal{O}' . Alors f est continue si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$. \circ

2.4. Topologies initiales. Avant de mettre une topologie sur l'espace produit, on va d'une part constater qu'on peut toujours s'arranger pour rendre des fonctions continues et d'autre part voir le produit cartésien d'ensemble comme satisfaisant une certaine propriété universelle.

LEMME 2.4.1. Soient Y un ensemble et $f: Y \rightarrow X$ une application. Il existe une (mais probablement plusieurs) topologies \mathcal{O}' de Y telles que $f: (Y, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O})$ soit continue. On désigne \mathcal{O}_f celle la plus grossière possible rendant f continue et on l'appelle topologie initiale associée à f . (C'est l'intersection de toutes les topologies rendant f continue.)

De même, si $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une collection d'espaces topologiques et $\underline{f} = (f_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ une collection d'applications, il existe une topologie $\mathcal{O}_{\underline{f}}$ la plus grossière possible rendant chacune des f_i continue. On l'appelle topologie initiale associée à \underline{f} . \circ

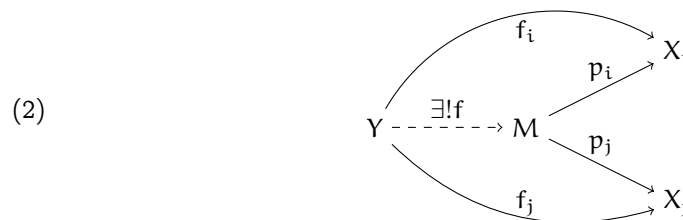
LEMME 2.4.2. Soient $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une collection d'espaces topologiques et $\underline{f} = (f_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ une collection d'applications. Une prébase de $\mathcal{O}_{\underline{f}}$ est donnée par :

$$\bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_i\}. \quad \circ$$

2.5. Produits d'espaces topologiques. Soit I un ensemble, $(X_i)_{i \in I}$ des ensembles. Pour Y un ensemble et $(f_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ une famille d'applications. On résume la situation ainsi :



On dit qu'une paire $(M, (p_i: M \rightarrow X_i)_{i \in I})$ est une solution du problème universel (1) si pour toute paire $(Y, (f_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I})$, il existe une unique application $f: Y \rightarrow M$ telle que $f_i = p_i \circ f$ pour tout $i \in I$. Autrement dit le diagramme



commute.

LEMME 2.5.1. Si $(M, (p_i: M \rightarrow X_i)_{i \in I})$ et $(N, (q_i: N \rightarrow X_i)_{i \in I})$ sont deux solutions au problème universelle (1) alors, il existe une unique bijection $\alpha: M \rightarrow N$ telle que M telle que $q_i = p_i \circ \alpha$ pour tout $i \in I$. \circ

Remarque 2.5.2. Le lemme précédent nous dit qu'une solution au problème universelle, si elle existe, est unique à un isomorphisme unique près. \circ

LEMME 2.5.3. Le produit cartésien $P = \prod_{i \in I} X_i$ muni des projections $(\pi_i: P \rightarrow X_i)_{i \in I}$ est une solution au problème universel (1). \circ

La morale de cette interlude est de voir que le produit cartésien d'un ensemble est en fait caractérisé par ce problème universelle. On va s'inspirer de cela pour définir la topologie sur le produit cartésien.

On considère donc maintenant une collection $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ d'espace topologique et le même problème universel (1) où maintenant les application l'ensemble Y est munis d'une topologie et les applications f et f_i sont supposées continues

LEMME 2.5.4. S'il existe une solution au problème universel (1) continu, alors est elle est unique à un homéomorphisme unique près. \circ

LEMME 2.5.5. La paire $((P, \mathcal{O}), (\pi_i)_{i \in I})$ constituée du produit cartésien $P = \prod_{i \in I} X_i$ munis de \mathcal{O}_P la topologie initiale pour la famille d'application $(\pi_i)_{i \in I}$ et de cette famille d'applications est une solution au problème universel (1) continu. \circ

DÉFINITION 2.5.6. La topologie sur P décrite dans le lemme précédent est appelée topologie produit. \circ

LEMME 2.5.7. Soit $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques alors une prébase de la topologie produit sur $P = \prod_{i \in I} X_i$ est donnée par :

$$\mathcal{B} = \left\{ O_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j \mid i \in I, O_i \in \mathcal{O}_i \right\}. \quad \circ$$

COROLLAIRE 2.5.8. Soit $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques alors une base de la topologie produit sur $P = \prod_{i \in I} X_i$ est donnée par :

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \text{ ouvert de } X_i \text{ avec } \#\{i \mid O_i \neq X_i\} < \infty \right\}.$$

En particulier, si I est fini, une base de la topologie produit est :

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \text{ ouvert de } X_i \right\}. \quad \circ$$

LEMME 2.5.9 (Produit des axiomes de séparation.). Un produit quelconque d'espace T_0 (resp. T_1 , resp. T_2) est T_0 (resp. T_1 , resp. T_2). \circ

2.6. Connexité. On va voir deux notions de connexité : la connexité par arc et la connexité "tout court". Le terme *connexe* n'est pas forcément très éclairant. En anglais, on dit *connected*, en allemand *Zusammenhängend* qui signifie littéralement "qui tient ensemble".

DÉFINITION 2.6.1. Soient x_0 et x_1 deux points de X . Un *chemin*⁴ de x_0 à x_1 est une application continue $\gamma: [0; 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(i) = x_i$ pour $i \in \{0, 1\}$. On note parfois $\gamma: x_0 \rightarrow x_1$.

L'espace topologique X est dit *connexe par arc*, si quelques soient $x_0, x_1 \in X$, il existe un chemin de x_0 à x_1 . \circ

Remarque 2.6.2.(1) Cette définition s'étend aux parties de X (munies de leurs topologies traces).

(2) On peut définir une relation d'équivalence sur X en disant que deux points x et y de X sont équivalents si il existe un chemin de x à y . On note \sim_{ca} cette relation d'équivalence.

(3) L'espace X est connexe par arc si et seulement si tous les points sont équivalents. \circ

(4) Les classes d'équivalence pour \sim_{ca} , sont appelées les composantes d'arc-connexité de X .

EXEMPLE 2.6.3. Les intervalles de \mathbb{R} sont les connexes par arcs de \mathbb{R} (c'est le théorème des valeurs intermédiaires.) \circ

PROPOSITION 2.6.4. Les ensembles \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes. \circ

Remarque 2.6.5. Il existe une surjection continue de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^2 . \circ

4. Ou arc.

DÉFINITION 2.6.6. Un ensemble X est connexe si toute application continue $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante (l'ensemble, $\{0, 1\}$ est évidemment munis de la topologie discrète). Cette définition s'étend aux parties de X (munies de leurs topologies traces). \circ

LEMME 2.6.7. Un ensemble X est connexe si et seulement si, il ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non-triviaux. \circ

Remarque 2.6.8.(1) C'est en général cette propriété que l'on prend comme définition de la connexité. Mais elle m'a paru moins "parlante".

(2) Comme dans le cas de la connexité par arc, on peut définir une relation d'équivalence : deux points $x, y \in X$ sont équivalents si quelque soit $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ continue, on a $f(x) = f(y)$. On note \sim_c cette relation d'équivalence.

(3) Ainsi X est connexe si et seulement si tous les points de X sont équivalents pour \sim_c .

(4) Les classes d'équivalence pour \sim_c sont appelées les *composantes connexes* de X . \circ

LEMME 2.6.9. Toute composante connexe de X est fermée. \circ

PROPOSITION 2.6.10. Pour tout espace X , la relation d'équivalence \sim_c est plus grossière que la relation d'équivalence \sim_{ca} . En d'autres termes, pour tout $x, y \in X$, $x \sim_{ca} y \implies x \sim_c y$. \circ

COROLLAIRE 2.6.11. Si un espace X est connexe par arc, il est connexe. \circ

EXEMPLE 2.6.12. Le contraire n'est pas forcément vrai (voir en TD). \circ

LEMME 2.6.13.⁵ Si $(C_i)_{i \in I}$ est une collection de parties connexes (resp. connexes par arc) de X deux à deux non-disjointes (c'est-à-dire telle que pour tout $i \neq j \in I$, $C_i \cap C_j \neq \emptyset$) alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe (resp. connexe par arc). \circ

LEMME 2.6.14. Si $(C_i)_{i \in I}$ est une collection de parties connexes (resp. connexes par arc) de X dont l'intersection n'est pas vide alors $\cup_{i \in I} C_i$ est connexe (resp. connexe par arc). \circ

LEMME 2.6.15. Si U est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n (pour la topologie venant d'une norme) alors il est connexe par arc. \circ

2.7. Compacité.

DÉFINITION 2.7.1. Un espace topologique X est *quasi-compact* si de tout recouvrement d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$, on peut extraire un recouvrement fini.

Un espace topologique X est *compact* si il est séparé et quasi-compact. \circ

LEMME 2.7.2. Si X est quasi-compact est $F \subseteq X$ est fermé, alors F est quasi-compact. \circ

LEMME 2.7.3. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue et surjective. Alors, si X est quasi-compact, Y est lui-aussi quasi-compact. \circ

5. Merci à Lucas Tonah pour la formulation de cet énoncé.

LEMME 2.7.4 (Lemme du tube). Soient X un espace quasi-compact et $y_0 \in Y$. Supposons que N est un ouvert de $X \times Y$ incluant $X \times \{y_0\}$ alors il existe U un ouvert de Y contenant y_0 tel que $X \times U \subseteq N$. \circ

THÉORÈME 2.7.5. Soient X et Y deux espaces compacts, alors $X \times Y$ est compact. \circ

COROLLAIRE 2.7.6. Un produit fini de compacts est compact. \circ

THÉORÈME 2.7.7 (Théorème de Tychonov). Un produit quelconque de compacts est compact (modulo l'axiome du choix). \circ

L'axiome du choix est équivalent au Lemme de Zorn, qui est un peu plus maniable que l'axiome lui-même :

LEMME 2.7.8 (Lemme de Zorn). Soit (Y, \preceq) un ensemble (partiellement) ordonné. Si tout sous-ensemble totalement ordonné de Y admet un majorant dans Y , alors Y admet un élément maximal. \circ

Courriel : louis-hadrien.robert@uca.fr