

## TOPOLOGIE MÉTRIQUE – PRINTEMPS 2026 – BALLADE COMPACTE

Le but de cette feuille est de montrer le théorème de Tychonov dans la cas général.

**Théorème de Tychonov.** Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques compacts. Alors l'ensemble  $X := \prod_{i \in I} X_i$ , muni de la topologie produit, est compact.

La démonstration du théorème de Tychonov nécessite l'axiome du choix. Nous allons nous en servir en appliquant le Lemme de Zorn :

**Lemme de Zorn.** Soit  $(Y, \preceq)$  un ensemble (partiellement) ordonné. Si tout sous-ensemble totalement ordonné de  $Y$  admet un majorant dans  $Y$ , alors  $Y$  admet un élément maximal.

On considère  $\mathcal{U}$  une famille d'ouvert de  $X$  et on suppose que  $X$  n'est recouvert par aucune sous-famille finie de  $\mathcal{U}$ . On souhaite montrer qu'il existe une  $x \in X$  tel que pour tout  $U \in \mathcal{U}$ ,  $x \notin U$ .

**Question 1.** Pourquoi cela suffit-il à démontrer le théorème ?

Si  $J \subseteq I$ , on note  $X_J = \prod_{i \in J} X_i$ . Ainsi,  $X_I = X$  et  $X_\emptyset = \{\emptyset\}$ . Si  $J \subseteq J' \subseteq I$ , on note  $\pi_{J',J}$  la projection de  $X_{J'}$  sur  $X_J$  et  $\pi_J := \pi_{I,J}$ .

**Question 2.** Supposons  $J \subseteq J' \subseteq I$ ,  $A \subseteq X_J$  et notons  $B = \pi_{J',J}^{-1}(A)$  montrer que  $\pi_{J'}^{-1}(B) = \pi_J^{-1}(A)$ .

On note  $\mathbf{P}$  l'union (disjointe) des espaces  $(X_J)_{J \subseteq I}$ . Un point  $p$  de  $\mathbf{P}$  est appelé un *point partiel*, le *domaine* de  $p$  est l'ensemble  $J$  tel que  $p \in X_J$ . On note  $p \preceq p'$  si les domaines  $J$  et  $J'$  de  $p$  et  $p'$  satisfont  $J \subseteq J'$  et que  $\pi_{J',J}(p') = p$ .

**Question 3.** Montrer que  $\preceq$  est une relation d'ordre.

**Question 4.** Supposons que  $p$  et  $p'$  sont deux points partiels de domaines  $J$  et  $J'$  disjoints. Montrer qu'il existe un unique point partiel  $q \in X_{J \cup J'}$  tel que  $p \preceq q$  et  $p' \preceq q$ . On note  $p \vee p' := q$ .

On dit qu'un point partiel  $p$  de domaine  $J$  est *mauvais* si pour n'importe quel voisinage  $V$  de  $p$ ,  $\pi_J^{-1}(V)$  ne peut être recouvert par un nombre fini d'ouvert de  $\mathcal{U}$ . On note  $\mathbf{M}$  l'ensemble des mauvais points partiels.

**Question 5.** Montrer que  $\emptyset \in X_\emptyset$  est mauvais.

**Question 6.** Pourquoi nous suffit-il de trouver un mauvais point partiel de domaine  $I$ .

**Question 7.** Soient  $p \preceq q$  deux points partiels. Montrer que si  $q$  est mauvais alors  $p$  est mauvais.

**Question 8.** Soit  $p$  un mauvais point partiel de domaine  $J$  et  $i_0 \in I \setminus J$ . En se servant de la compacité de  $X_{i_0}$ , montrer qu'il existe  $a \in X_{i_0} = X_{\{i_0\}}$  tel que  $p \vee a \in \mathbf{M}$ . On pourra raisonner par l'absurde.

**Question 9.** Soit  $\mathbf{S}$  un ensemble totalement ordonné de mauvais points partiels. Montrer que  $\mathbf{S}$  a un plus petit majorant  $m_{\mathbf{S}}$  dans  $\mathcal{U}$ .

**Question 10.** Avec les notations précédentes, montrer que  $m_{\mathbf{S}} \in \mathbf{M}$ .

**Question 11.** Conclure en utilisant le Lemme de Zorn.