

## 1 Wiederholung:

### 1.1 Korollar 2 zu Schur's Lemma

Falls  $\rho^1$  und  $\rho^2$  nicht isomorph sind, gilt:

$$1/g \sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{i_1 j_1}(t) = 0$$

### 1.2 Korollar 3 zu Schur's Lemma

Falls  $V_1 = V_2$  und  $\rho^1 = \rho^2$ , gilt:

$$1/g \sum_{t \in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{i_1 j_1}(t) = 1/n \sum \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} = \begin{cases} 1/n, & \text{wenn } i_1 = i_2 \text{ und } j_1 = j_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

### 1.3 Proposition 6

Sei  $f$  eine Klassenfunktion auf  $G$  und  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine lineare Darstellung von  $G$ .  $\rho_f : V \rightarrow V$  linear sei definiert durch

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t) \rho_t.$$

Ist  $V$  irreduzibel, von Grad  $n$  und mit Charakter  $\chi$ , so ist  $\rho_f$  eine Homothetie mit Faktor  $\lambda$  gegeben durch

$$\lambda = 1/n \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = g/n(f|\chi^*).$$

## 2 Die kanonische Zerlegung einer Darstellung

$\rho : G \rightarrow GL(V)$  sei eine lineare Darstellung von  $G$ . Wir werden eine direkte Summenzerlegung von  $V$  definieren, die weniger „fein“ als die Zerlegung in irreduzible Darstellungen ist, die aber den Vorteil hat *eindeutig* zu sein. Sie sieht folgendermaßen aus:

Seien  $\chi_1, \dots, \chi_h$  die verschiedenen irreduziblen Charaktere der Darstellungen  $W_1, \dots, W_h$  von  $G$  und seien  $n_1, \dots, n_h$  ihre Grade. Außerdem sei  $U_1 \oplus \dots \oplus U_m$  eine Zerlegung von  $V$  als direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Dann bezeichne mit  $V_i$  für  $i = 1, \dots, h$  die direkte Summe derjenigen der  $U_1, \dots, U_m$ , die zu  $W_i$  äquivalent sind. Daraus ergibt sich die *kanonische Zerlegung*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h.$$

(Mit anderen Worten, zerlegen wir zunächst  $V$  in eine Summe irreduzibler Darstellungen, und fassen dann die äquivalenten Darstellungen zusammen.)

## 2.1 Satz 8

Die *kanonische Zerlegung* besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) Die Zerlegung  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$  hängt nicht von der ursprünglich gewählten Zerlegung in irreduzible Darstellungen ab.
- (2) Die Projektion  $p_i$  von  $V$  auf  $V_i$  verbunden mit der Zerlegung, wird durch die Formel

$$p_i = n_i/g \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t$$

gegeben.

**Bew:** Wir beweisen (2). Da die Projektionen  $p_i$  die  $V_i$  bestimmen, folgt die Behauptung (1). Wir setzen

$$q_i = n_i/g \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

Sei  $W$  eine irreduzible Darstellung mit dem Charakter  $\chi$  und dem Grad  $n$ . Aus Proposition 6 folgt, daß  $q_i|_W$  eine Homothetie mit Faktor  $n_i/n(\chi_i|\chi)$  ist; sie ist also 0, wenn  $\chi_i \neq \chi$ , und 1, wenn  $\chi_i = \chi$ . Mit anderen Worten ist  $q_i$  die Identität auf einer irreduziblen Darstellung isomorph zu  $W_i$  und ist Null auf den anderen. Im Hinblick auf die Definition von  $V_i$  folgt, daß  $q_i$  die Identität auf  $V_i$ , und 0 auf  $V_j$ ,  $j \neq i$  ist. Wenn wir nun ein  $x \in V$  in seine Komponenten zerlegen:

$$x = x_1 + \dots + x_h,$$

so bekommen wir  $q_i(x) = q_i(x_1) + \dots + q_i(x_h) = x_i$ . D.h., daß  $q_i$  gleich der Projektion  $p_i$  von  $V$  auf  $V_i$  ist.  $\square$

Demnach läßt sich die Zerlegung einer Darstellung  $V$  in zwei Schritten durchführen. Zuerst bestimmt man die kanonische Zerlegung  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$ , mittels der Formeln für die Projektionen  $p_i$ . Dann, wenn es erforderlich ist, wählt man eine Zerlegung von  $V_i$  in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen, die isomorph zu  $W_i$  sind:

$$V_i = W_i \oplus \dots \oplus W_i.$$

Die letzte Zerlegung kann man im allgemeinen auf unendlich viele Weisen durchführen.

## 2.2 Beispiel 1

Sei  $G = \{1, s\}$  mit  $s^2 = 1$ . Diese Gruppe besitzt zwei irreduzible Darstellungen von Grad 1,  $W^+$  und  $W^-$ , die  $\rho_s = +1$  und  $\rho_s = -1$  entsprechen. Die kanonische Zerlegung von  $V$  lautet also  $V = V^+ \oplus V^-$ ; die Komponente  $V^+$  wird von den  $x \in V$  erzeugt, die symmetrisch sind ( $\rho_s x = x$ ), die Komponente  $V^-$  dagegen von denen, die antisymmetrisch sind ( $\rho_s x = -x$ ). Die entsprechenden Projektionen sind:

$$p^+ x = \frac{1}{2}(x + \rho_s x), \quad p^- x = \frac{1}{2}(x - \rho_s x).$$

$V^+$  und  $V^-$  in irreduzible Komponenten zu zerlegen, bedeutet einfach, diese Räume als direkte Summe von *Geraden* zu zerlegen.

## 2.3 Übung

$H_i$  sei der Vektorraum der linearen Abbildungen  $h : W_i \rightarrow V_i$  mit  $\rho_s h = h \rho_s$  für alle  $s \in G$ .  $(h_1, \dots, h_k)$  sei eine Basis von  $H_i$ , und bilde die direkte Summe  $W_i \oplus \dots \oplus W_i$  von  $k$  Exemplaren  $W_i$ . Offensichtlich definiert das System  $(h_1, \dots, h_k)$  eine lineare Abb.  $h$  von  $W_i \oplus \dots \oplus W_i$  in  $V_i$ . Zeige, dass es sich hierbei um einen Isomorphismus handelt und dass sich jeder Isomorphismus auf diese Weise gewinnen lässt.

## 3 Die explizite Zerlegung einer Darstellung

Man übernehme die Notation aus Sektion 2, und sei

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$$

die kanonische Zerlegung gegebener Darstellung. Nun wollen wir explizit die Zerlegung von  $V_i$  in eine direkte Summe von Unterdarstellungen, die isomorph zu  $W_i$  sind, konstruieren. Sei  $W_i$ , durch die Basis  $(e_1, \dots, e_n)$ , in Matrixform  $(r_{\alpha\beta}(s))$  gegeben; wir haben  $\chi_i(s) = \sum_{\alpha} r_{\alpha\alpha}(s)$  und  $n = n_i = \dim W_i$ . Für jedes Paar  $\alpha, \beta$  von 1 bis  $n$ , bezeichne  $p_{\alpha\beta}$  die lineare Abbildung von  $V$  zu  $V$ , definiert durch:

$$(*) : p_{\alpha\beta} = n/g \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \rho_t.$$

### 3.1 Proposition 8

- (a) Die Abbildung  $p_{\alpha\alpha}$  ist eine Projektion; sie ist Null auf  $V_j$ ,  $j \neq i$ . Ihr Bild  $V_{i,\alpha}$  ist in  $V_i$  enthalten, und  $V_i$  ist eine direkte Summe von  $V_{i,\alpha}$  für  $1 \leq \alpha \leq n$ . Es gilt  $p_i = \sum_{\alpha} p_{\alpha\alpha}$ .
- (b) Die lineare Abb.  $p_{\alpha\beta}$  ist Null auf  $V_j$ ,  $j \neq i$ , aber auch auf  $V_{i,\gamma}$  für  $\gamma \neq \beta$ ; sie definiert einen Isomorphismus von  $V_{i,\beta}$  auf  $V_{i,\alpha}$ .
- (c) Sei  $x_1 \neq 0$  ein Element aus  $V_{i,1}$  und sei  $x_{\alpha} = p_{\alpha 1}(x_1) \in V_{i,\alpha}$ .  $x_{\alpha}$  sind linear unabhängig und erzeugen einen, auf  $G$  stabilen, Untervektorraum  $W(x_1)$  mit Dimension  $n$ . Für jedes  $s \in G$ , gilt:

$$\rho_s(x_{\alpha}) = \sum_{\beta} r_{\beta\alpha}(s) x_{\beta}$$

(Insbesondere ist  $W(x_1)$  isomorph zu  $W_i$ ).

- (d) Sei  $(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m)})$  eine Basis von  $V_{i,1}$ . Die Darstellung  $V_i$  ist eine direkte Summe von Unterdarstellungen  $W(x_1^{(1)}), \dots, W(x_1^{(m)})$ , definiert wie in c).

(Folglich gibt die Wahl der Basis von  $V_{i,1}$  die Zerlegung von  $V_i$  in eine direkte Summe von Darstellungen, isomorph zu  $W_i$  an.)

**Bew:** Die Gleichung (\*) erlaubt uns  $p_{\alpha\beta}$  in beliebigen Darstellungen von  $G$  zu definieren und speziell in den irreduziblen Darstellungen  $W_j$ . Für  $W_i$  gilt:

$$p_{\alpha\beta}(e_{\gamma}) = n/g \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) \rho_t(e_{\gamma}) = n/g \sum_{\delta} \sum_{t \in G} r_{\beta\alpha}(t^{-1}) r_{\delta\gamma}(t) e_{\delta}.$$

Aus 1.2 folgt:

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \begin{cases} e_\alpha, & \text{wenn } \gamma = \beta \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit entspricht  $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$  der Identität auf  $W_i$ , und es gilt

$$p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta} = \begin{cases} p_{\alpha\beta}, & \text{wenn } \beta = \gamma \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\rho_s \circ p_{\alpha\gamma} = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta\gamma}.$$

Für  $W_j$ , mit  $j \neq i$ , benutzen wir 1.1 und die gleiche Argumentation wie oben um zu zeigen, dass alle  $p_{\alpha\beta}$  Null sind.

Nun zerlegen wir  $V$  in eine direkte Summe von, zu  $W_j$  isomorphen, Unterdarstellungen und wenden das vorige zu jeder von diesen Darstellungen an um (a) und (b) zu zeigen. Außerdem, bleibt das oben genannte auch in  $V$  geltend.

$$\rho_s(x_\alpha) = \rho_s \circ p_{\alpha 1}(x_1) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta 1}(x_1) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) x_\beta,$$

zeigt (c) und (d) folgt aus (a), (b) und (c). □