3.1 Abelsche Untergruppen

Sei G eine Gruppe. Man sagt, dass G abelsch (oder kommutativ) ist, falls $st = ts$ für alle $s, t \in G$. In einer abelschen Gruppe besteht jede Konjugationsklasse aus genau einem Element (Zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ sind konjugiert falls $\exists g \in G : g_1 = gg_2g^{-1}$ und falls G abelsch $g_1 = gg_2g^{-1} = gg^{-1}g_2 = g_2$).

Theorem 9 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) G ist abelsch

(2) Jede irreduzible Darstellung von G hat Grad 1 (Grad: Dimension von V)

Beweis. $\Rightarrow$: Sei g die Ordnung von G und $(n_1, ...n_h)$ die Grade der irreduziblen Darstellungen von G. Nach Kapitel 2.5 Theorem 7 ist h die Anzahl der Konjugationsklassen von G und nach 2.4 Korollar 2 Bemerkung 1 $g = n_1^2 + ... + n_h^2$. Da G abelsch ist, gilt $h = g$, also müssen alle $n_i = 1$ sein, also haben alle irreduzible Darstellungen Grad 1.

$\Leftarrow$: Sei g die Ordnung von G und $n_1 = n_2 = ... = n_h = 1$ die Grade der irreduziblen Darstellungen von G. Nach Kapitel 2.5 Theorem 7 ist h die Anzahl der Konjugationsklassen von G und nach 2.4 Korollar 2 Bemerkung 1 $g = n_1^2 + ... + n_h^2$. Da die $n_i = 1$ sind, folgt $g = h$, also ist die Anzahl der Konjugationsklassen von G gleich der Ordnung von G und somit ist G abelsch. □

Korollar Sei A eine abelsche Untergruppe von G, a die Ordnung von A und g die Ordnung von G. Jede irreduzible Darstellung von G hat Grad $\leq \dfrac{g}{a}$.

Lemma Es gibt genau $\frac{g}{a}$ Elemente s $\in G$, so dass $G = s_1A \cup s_2A \cup .... \cup s_{\frac{g}{a}}A$, wobei die Vereinigungen disjunkt sind und $s_iA = \{s_ia | a \in A\}$.

Beweis Lemma. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt:
Seien $s, y \in G$, dann gilt $s \sim y$ genau dann wenn $s^{-1}y \in A$.
Diese ist eine Äquivalenzrelation:
Reflexivität: $s^{-1}s = 1 \in A$.
Symmetrie: Sei $s^{-1}y \in A$. Da $(s^{-1}y) \cdot (y^{-1}s) = 1$, folgt $y^{-1}s \in A$.
Transitivität: Seien $s^{-1}y \in A$ und $y^{-1}z \in A$. Da $(s^{-1}y) \cdot (y^{-1}z) = s^{-1}z$, ist $s^{-1}z \in A$.
Dann ist G die disjunkte Vereinigung von den Äquivalenzklassen. Sei S eine Äquivalenzklasse und $s \in S \subseteq G$. Dann ist $sA \subseteq S$ und $s^{-1}y \in A \iff y \in S$. Dann ist $ss^-1y \in sA$, also $y \in sA$. Das heißt, dass jedes Element von G in einem s_iA liegt. Da die s_iA disjunkt sind und G die disjunkte Vereinigung von den Äquivalenzklassen ist, folgt $G = s_1A \cup s_2A \cup ....s_pA$. Da G Ordnung g hat, und die s_iA Ordnung a haben, folgt $p = \dfrac{g}{a}$. □

Beweis Korollar. Sei $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine irreduzible Darstellung von G. Durch Einschränkung von ρ auf A erhalten wir eine Darstellung $\rho_A : A \longrightarrow GL(V)$ von A. Sei $W \subseteq V$ eine irreduzible Unterdarstellung ρ_A von A. Nach Theorem 9 folgt $\dim(W) = 1$.

Sei $V' = \sum_{s \in G} \rho_s(W) \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Dann ist V' stabil unter G, denn:
Seien v'$\in V', s \in G, w_s \in W$. Dann ist $v' = \sum_{s \in G} \rho_s(w_s)$ und für $t \in G$ ist

$$\rho_t(v') = \rho_t \left(\sum_{s \in G} \rho_s(w_s) \right) \underset{\rho \ linear}{=} \sum_{s \in G} \rho_t \rho_s(w_s) \underset{u=ts \Longleftrightarrow s=t^{-1}u}{=} \sum_{u \in G} \rho_u(w_{t^{-1}u}) \in V'$$

Da ρ irreduzibel ist, gilt $V = V'$. Nach Lemma ist die Anzahl von disjunkten $\rho_s W$ höchstens gleich $\frac{g}{a}$. Da V die Summe der $\rho_s W$ ist, erhalten wir $\dim(V) \leq \frac{g}{a}$. $\square$

Beispiel: Die Gruppe D$_6$ Die Gruppe D_6 ist die Gruppe von Rotationen und Spiegelungen, die auf dem Hexagone wirken. Sie enthält 6 Rotationen und 6 Spiegelungen und ihre Ordnung ist 12. Nach Korollar hat jede irreduzible Darstellung von G Grad $\leq \frac{12}{6} = 2$.
Wenn r eine Rotation um den Winkel $(2\pi)/6$ und s eine beliebige Spiegelung sind, erhalten wir $r^6 = 1$, $s^2 = 1$ und $srs = r^{-1}$. Jedes Element kann geschrieben werden als r^k oder sr^k für $0 \leq k \leq 5$
Es gibt genau 4 1-dimensionalen irreduziblen Darstellungen. Man erhält sie, indem man $\pm$ 1 zu r und s zuordnet, in allen möglichen Kombinationen. Die Charaktere $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Nun betrachten wir die 2-dimensionalen Darstellungen. Seien $w := e^{(2\pi i)/6}$ und h eine ganze Zahl. Wir definieren eine Darstellung von ρ^h:
$\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} w^{hk} & 0 \\ 0 & w^{-hk} \end{pmatrix}$, $\rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-hk} \\ w^{hk} & 0 \end{pmatrix}$ Die Darstellung hängt nur von den Restklassen h modulo 6 ab und ρ^h und ρ^{6-h} sind isomorph (da sie die gleiche Charaktere haben), also können wir sagen, dass $0 \leq h \leq 3$. Die Fälle $h = 0$ und $h = 3$ sind uninteressant, da die Darstellungen reduzibel sind mit Charakteren $\psi_1 + \psi_2$ beziehungsweise $\psi_3 + \psi_4$. Für $0 < h < 3$ ist die Darstellung ρ^h irreduzibel: da $w^h \neq w^{-h}$, sind die einzige stabile Linien unter $\rho^h(r)$ die Koordinatenachsen und diese sind nicht stabil unter $\rho^h(s)$. Dann gibt es 2 2-dimensionalen irreduziblen Darstellungen, nämlich für $h = 1$ und $h = 2$. Die Charakteren sind: $\chi_h(r^k) = w^{hk} + w^{-hk}$ und $\chi_h(sr^k) = 0$.

Beispiel: Die quaternionische Gruppe Die quaternionische Gruppe hat 8 Elemente: $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$.
Die Multiplikationstabelle ist

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	-k	k	j	-j
-i	-i	i	1	-1	k	-k	-j	j
j	j	-j	k	-k	-1	1	-i	i
-j	-j	j	-k	k	1	-1	i	-i
k	k	-k	-j	j	i	-i	-1	1
-k	-k	k	j	-j	-i	i	1	-1

oder kürzer geschrieben: $-1a = -a \ \forall a \in \{i, j, k, -i, -j, -k\}$ und $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
Diese Gruppe ist nicht abelsch und nach Theorem 9 folgt, dass sie mindestens eine irreduzible Darstellung mit Grad > 1 hat. Da die Untergruppe $\{1, -1, i, -i\}$ 4 Elemente hat, folgt nach Korollar dass jede irreduzible Darstellung von der Gruppe Grad kleiner gleich $8/4 = 2$ hat. Da die triviale Darstellung irreduzibel ist, gibt es mindestens eine irreduzible Darstellung die Grad 1 hat. Nach Kapitel 2.4 Korollar 2 Bemerkung 1 gilt $|G| = n_1^2 + ... + n_h^2$, wobei G die quaternionische Gruppe ist und die $n_1 ... n_h$ die Grade der irreduziblen Darstellungen von G sind. Da die Grade der irreduziblen Darstellungen von G kleiner gleich 2 sind, und da es mindestens eine irreduzible Darstellung von Grad 1 gibt, folgt $8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$, also hat die Gruppe G genau 5 irreduzible Darstellungen: 4 mit Grad 1 und eine mit Grad 2. Die Charaktertafel der 1-dimensionalen Darstellungen ist:

	1	-1	i	j	k
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1

Sei χ_5 der Charakter der 5-dimensionalen Darstellung. Nach Kapitel 2.4 Korollar 1 gilt $\chi_{reg} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + 2\chi_5$ und nach 2.4 Proposition 5 gilt:

	1	-1	i	j	k
χ_{reg}	8	0	0	0	0

Somit erhalten wir:

	1	-1	i	j	k
χ_5	2	-2	0	0	0

3.2 Produkt von zwei Gruppen

Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen und sei $G_1 \times G_2$ ihr (kartesisches) Produkt, also die Menge von Paaren (s_1, s_2) mit $s_1 \in G_1$ und $s_2 \in G_2$. Wenn wir das Produkt als $(s_1, s_2) \cdot (t_1, t_2) = (s_1 t_1, s_2 t_2)$ definieren, definiert uns das eine Gruppenstruktur auf $G_1 \times G_2$. Mit dieser Struktur wird $G_1 \times G_2$ das Gruppenprodukt von G_1 und G_2 genannt. Wenn G_1 die

Ordnung g_1 hat und G_2 die Ordnung g_2, dann hat $G_1 \times G_2$ Ordnung $g = g_1 g_2$.
Man kann G_1 und G_2 auch als Untergruppen von $G_1 \times G_2$ identifizieren:

$$G_1 = \{(s_1, 1) : s_1 \in G_1\} \subseteq G_1 \times G_2$$

$$G_2 = \{(1, s_2) : s_2 \in G_2\} \subseteq G_1 \times G_2$$

Umgekehrt sei G eine Gruppe die G_1 und G_2 als Untergruppen enthält und seien die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

1. Jedes $s \in G$ kann nur in der Form $s = s_1 s_2$ mit $s_1 \in G_1$ und $s_2 \in G_2$ geschrieben werden.

2. Für $s_1 \in G_1$ und $s_2 \in G_2$ gilt $s_1 s_2 = s_2 s_1$.

Das Produkt von zwei Elementen $s = s_1 s_2$ und $t = t_1 t_2$ kann dann so geschrieben werden: $st = s_1 s_2 t_1 t_2 = (s_1 t_1)(s_2 t_2)$. Wenn man $(s_1, s_2) \in G_1 \times G_2$ das Element $s_1 s_2 \in G$ zuordnet, erhält man ein Isomorphismus von $G_1 \times G_2$ auf G. In diesem Fall nennt man G das direkte Produkt von seinen Untergruppen G_1 und G_2 und wir identifizieren es mit $G_1 \times G_2$.
Seien jetzt $\rho^1 : G_1 \longrightarrow GL(V_1)$ und $\rho^2 : G_2 \longrightarrow GL(V_2)$ Darstellungen von G_1 und G_2. Wir definieren eine Darstellung $\rho^1 \otimes \rho^2$ von $G_1 \times G_2$ in $V_1 \otimes V_2$ durch $(\rho^1 \otimes \rho^2)(s_1, s_2) = \rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2)$. Diese Darstellung wird Tensorprodukt von den Darstellungen ρ^1 und ρ^2 genannt.
Sei χ_i der Charakter von ρ_i $(i = 1, 2)$, dann ist der Charakter χ von $\rho^1 \otimes \rho^2$ gegeben durch $\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2)$(2.1 Proposition 2 (ii)).

Bemerkung Wenn $G_1 = G_2 = G$ ist, ist das beschriebene Tensorprodukt $\rho^1 \otimes \rho^2$ eine Darstellung von $G \times G$ $(\rho^1 \otimes \rho^2 : G \times G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2))$. In 1.5 war $\rho^1 \otimes \rho^2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$, also die Darstellung eingeschränkt auf die Hauptdiagonale $\{(s, s) : s \in G\} \subseteq G \times G$.

Theorem 10

1. Wenn ρ^1 und ρ^2 irreduzibel sind, dann ist $\rho^1 \otimes \rho^2$ eine irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$.

2. Seien $\rho_1, \rho_1', \rho_2, \rho_2'$ irreduzible Darstellungen. Dann ist $\rho_1 \otimes \rho$ isomorph zu $\rho_1' \otimes \rho_2'$ genau dann wenn $\rho_1 \simeq \rho_1'$ und $\rho_2 \simeq \rho_2'$

3. Jede irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$ ist isomorph zu einer Darstellung $\rho^1 \otimes \rho^2$ wobei ρ^i eine irreduzible Darstellung von G_i(i=1,2) ist.

Beweis. Zu (1): Seien ρ^1 und ρ^2 irreduzibel, g_1 die Ordnung von G_1 und g_2 die Ordnung von G_2.

Nach 2.3 Theorem 3 gilt $\frac{1}{g_1}\sum\limits_{s_1}|\chi_1(s_1)|^2 = 1$ und $\frac{1}{g_2}\sum\limits_{s_2}|\chi_2(s_2)|^2 = 1$. Multiplikation ergibt: $\frac{1}{g}\sum\limits_{s_1,s_2}|\chi(s_1,s_2)|^2 = 1$. Nach 2.3 Theorem 5 ist $\rho^1 \otimes \rho^2$ irreduzibel.

Zu (2): Direktes Nachrechnen zeigt $(\chi\rho_1\otimes\rho_2|\chi\rho_1'\otimes\rho_2') = (\chi_1\chi_2|\chi_1'\chi_2') = (\chi_1|\chi_1')(\chi_2|\chi_2')$. Die Behauptung folgt dann aus 2.3 Theorem 3 (ii).

Zu (3): Seien $(V_i)_{i\in I}$ die irreduzible Darstellungen von G_1, n_i die Grade von den $(V_i)_{i\in I}$,$(W_j)_{j\in J}$ die irreduziblen Darstellungen von G_2 und m_j die Grade von den $(W_j)_{j\in J}$. Nach 2.4 Korollar 2 gilt: $\sum\limits_i n_1^2 = g_1$ und $\sum\limits_j m_j^2 = g_2$. Dann ist $\sum\limits_{i,j}(n_i m_j)^2 = (\sum\limits_i n_i^2)(\sum\limits_j m_j^2) = g_1 g_2$. Nach 2.4 Bemerkung (2) sind also die $V_i \otimes W_j$ alle irreduziblen Darstellungen von $G_1 \times G_2$, die paarweise nicht isomorph sind. Dann muss jede irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$ isomorph zu einer Darstellung in $V_i \otimes W_j$ sein und mit (2) folgt die Behauptung.

$\square$

Übung: Sei ρ eine irreduzible Darstellung von G mit Grad n und Charakter χ. Sei C der Zentrum von G (die Menge aller $s \in G$ mit $st = ts\ \forall t \in G$) und c die Ordnung von C. Zeigen Sie, dass ρ_s eine Homothetie für alle $s \in C$ ist (benutzen Sie das Lemma von Schur).