Induzierte Darstellung endlicher Gruppen

Seien im Folgenden G stets eine Gruppe und V ein Vektorraum.

Definition: Linksnebenklassen einer Untergruppe

Sei H Untergruppe von G. Dann ist für jedes $g \in G$:
$gH := \{gh | h \in G\}$ die Linksnebenklasse von H bzgl. g.

Die Menge der Linksnebenklassen von H wird mit G/H bezeichnet und ist eine disjunkte Zerlegung der Menge G.

Bemerkung

Zwei Elemente $g, g' \in G$ heißen kongruent modulo H ($g \equiv g' \mod H$)
$:\iff g^{-1}g' \in H \Leftrightarrow g' \in gH$ (falls also g und g' in der gleichen Linksnebenklasse enthalten sind.)

Satz von Lagrange

Sei H Untergruppe von G. Dann gilt:

$$|G| = |H| \cdot (G : H)$$

wobei $(G : H) = |G/H|$ den Index von H in G bezeichnet. □

Beweis

Die Aussage des Satzes folgt aus $G = \dot{\bigcup}\{gH | h \in H\}$ und $|\{gh | h \in H\}| = |H|$.

Definition: Repräsentantensystem

Sei I Indexmenge mit $|I| = (G : H)$. Wird aus jeder Linksnebenklasse $\sigma_i \in G/H$ ein beliebiges festes Element r_i gewählt, so ist $R = \{r_i | i \in I\}$ ein Repräsentantensystem von G/H.

Bemerkung

Jedes $g \in G$ besitzt eine eindeutige Gestalt $g = rh$ mit $r \in R, h \in H$.

Erinnerung und Definition

Definition Unterdarstellung:
Sei $\rho : G \to GL(V)$ G-Darstellung in V und W ein Untervektorraum von V. Ist W invariant gegenüber G (d.h. es gilt $w \in W \Rightarrow \rho_g(w) \in W \ \forall g \in G$), so stellt W eine Unterdarstellung von V dar. Man erhält die

Darstellung $\rho^W : G \to GL(W)$.

Einschränkung einer Abbildung:
Sei H Untergruppe von G und $\rho : G \to GL(V)$ eine lineare Darstellung von G in V.
$\rho|_H : H \to GL(V)$ stellt die Einschränkung von ρ auf H dar.

Definition: Induzierte Darstellung

Sei $\rho : G \to GL(V)$ G-Darstellung in V und $\theta = \rho^W|_H : H \to GL(W)$ eine Unterdarstellung von V eingeschränkt auf H, wobei H Untergruppe von G, W Untervektorraum von V.
(Schreibe: θ ist H-Unterdarstellung in W.)
Bezeichne $\sigma \in G/H$ eine Linksnebenklasse von H und $W_\sigma := \rho_g W := \{\rho_g(w) | w \in W\}$ für ein beliebiges $g \in \sigma$.
Dann hängt $\rho_g W$ nur von σ ab und $\sum\limits_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ ist eine Unterdarstellung von V.

Die Darstellung ρ von G in V heißt induziert von der Darstellung θ von H in W, falls:

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

Man schreibt dann: $V = \mathrm{Ind}_H^G W = \mathrm{Ind} W$.

Bemerkung: Äquivalente Forderungen

$V = \mathrm{Ind}_H^G W$, falls

1) jedes $v \in V$ eine eindeutige Gestalt $v = \sum\limits_{\sigma \in G/H} w_\sigma, \quad w_\sigma \in W_\sigma \quad \forall \sigma$ besitzt

oder 2) für R Repräsentantensystem von G/H gilt: $V = \bigoplus\limits_{r \in R} \rho_r W$

woraus folgt: $\dim V = \sum\limits_{r \in R} \dim(\rho_r W) = (G : H) \cdot \dim W$.

Bemerkung, Gegenbeispiel

Für ρ G-Darstellung in V, θ H-Unterdarstellung in W mit H und W wie oben gilt nicht automatisch $V = \mathrm{Ind}_H^G W$, denn zum Beispiel:
Sei $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$, $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 2\}$ und ρ die triviale G-Darstellung in $\mathbb{C}^7$, θ die triviale H-Darstellung in $\mathbb{C}$.
Dann ist θ Unterdarstellung von ρ, jedoch gilt $\dim \mathbb{C}^7 = 7 \neq 2 = (G : H) \cdot \dim \mathbb{C}$, also $\mathbb{C}^7 \neq \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}$.

Beispiele

1) Habe V eine Basis $(e_s)_{s\in G}$ und W Untervektorraum von V eine Basis $(e_t)_{t\in H}$. Sei $\theta : H \to GL(W)$ mit $\theta_h(e_t) = e_{ht}$ die reguläre Darstellung von H in W, dann ist die reguläre Darstellung von G in V von θ induziert.

Beweis:

Sei R Repräsentantensystem von G/H. Jedes $w \in W$ besitzt eine eindeutige Gestalt: $w = \sum\limits_{t\in H} \lambda_t e_t$.

Jedes $v \in V$ besitzt eine eindeutige Gestalt: $v = \sum\limits_{s\in G} \lambda_s e_s$.

Seien r_i jeweils Repräsentanten von $\sigma \in G/H$. Jedes v in V besitzt eine Schreibweise:

$v = \sum\limits_{s\in G} \lambda_s e_s = \sum\limits_{\sigma\in G/H} \sum\limits_{r\in\sigma} \lambda_r e_r = \sum\limits_{\sigma\in G/H} \sum\limits_{h\in H} \lambda_{r_i h} e_{r_i h} = \sum\limits_{\sigma\in G/H} \rho_{r_i}\Big(\sum\limits_{h\in H} \lambda_{r_i h} e_h \Big) = \sum\limits_{\sigma\in G/H} \rho_{r_i}(w)$ $\square$

2) Habe V eine Basis $(e_\sigma)_{\sigma\in G/H}$, sei H Untergruppe von G und $\rho : G \to GL(V)$ lineare Darstellung mit $\rho_g(e_\sigma) = e_{g\sigma},\ g \in G,\ \sigma \in G/H$. Dann ist ρ die Permutationsdarstellung von G bzgl. G/H.

ρ wird induziert durch $\theta : H \to GL(\mathbb{C}e_H)$ mit $\theta_h(e_H) = e_H$, wobei e_H die triviale Linksnebenklasse von G/H und invariant unter H ist.

3) Ist ρ_1 induziert von θ_1 und ρ_2 induziert von θ_2, dann ist $\rho_1 \oplus \rho_2$ induziert von $\theta_1 \oplus \theta_2$.

Beweis:

Es gilt für ρ_1 G-Darstellung in V_1, ρ_2 G-Darstellung in V_2, θ_1 H-Unterdarstellung in W_1, θ_2 H-Unterdarstellung in W_2: $V_1 \oplus V_2 = \bigoplus\limits_{r\in R} \rho_{1r} W1 \oplus \bigoplus\limits_{r\in R} \rho_{2r} W_2 = \bigoplus\limits_{r\in R} (\rho_1 \oplus \rho_2)(W_1 \oplus W_2)$. $\square$

4) Sei (V, ρ) induziert von (W, θ), W_1 H-Unterdarstellung W. Dann ist der Untervektorraum $V_1 = \sum\limits_{r\in R} \rho_r W_1$ von V stabil unter G und $\widetilde{\rho} : G \to GL(V_1)$ induziert von $\widetilde{\theta} : H \to GL(W_1)$.

Definition: Darstellungsmorphismus

Seien $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ und $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ zwei G-Darstellungen. Eine lineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$ ist ein G-Darstellungmorphismus, falls für alle g in G und alle v in V_1 gilt:$f(\rho^1_g(v)) = \rho^2_g(f(v))$.

Lemma

Sei $\widetilde{V}$ Vektorraum und (V, ρ) induziert von (W, θ), $\widetilde{\rho}$ G-Darstellung von $\widetilde{V}$ und $f : W \to \widetilde{V}$ ein H-Darstellungsmorphismus (d.h. $f(\theta_h(w)) = \widetilde{\rho}_h(f(w)) \quad \forall h \in H,\ w \in W$).

Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $F : V \to \widetilde{V}$. s.d. $F|_W = f$ und $F \circ \rho_g = \widetilde{\rho}_g \circ F \quad \forall g \in G$.

Beweis

1) Eindeutigkeit von F:

Gelte $F|_W = f$ und $F \circ \rho_g = \widetilde{\rho}_g \circ F \quad \forall g \in G$. Ist nun $x \in \rho_g W (\Rightarrow {\rho_g}^{-1}(x) \in W)$, dann gilt:

$$F(x) = F(\rho_g {\rho_g}^{-1}(x)) = \widetilde{\rho}_g F({\rho_g}^{-1}(x)) = \widetilde{\rho}_g F|_W({\rho_g}^{-1}(x)) = \widetilde{\rho}_g f({\rho_g}^{-1}(x))$$

Da f vorgegeben ist, ist F eindeutig auf $\rho_g W$ festgelegt und somit auch auf V, da nach Voraussetzung $V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$.

2) Existenz von F:
Sei $x \in W_\sigma$ und wähle ein beliebiges, festes $g \in \sigma$. Definieren wir $F(x) := \widetilde{\rho}_g f({\rho_g}^{-1}(x))$, so ist $F(x)$ unabhängig von der Wahl von $g \in \sigma$, denn:
Sei $g' = gh \in \sigma,\ h \in H$ ein weiteres Element aus σ. Dann gilt:

$$\widetilde{\rho}_{g'} f({\rho_{g'}}^{-1}(x)) = \widetilde{\rho}_g \widetilde{\rho}_h f({\rho_h}^{-1}{\rho_g}^{-1}(x)) = \widetilde{\rho}_g \widetilde{\rho}_h f(({\theta_h}^{-1}{\rho_g}^{-1}(x)) = \widetilde{\rho}_g f(\theta_h {\theta_h}^{-1}{\rho_g}^{-1}(x)) = \widetilde{\rho}_g f({\rho_g}^{-1}(x))$$

Da V die direkte Summe der W_σ, $\sigma \in G/H$ ist, existiert eine eindeutige Abbildung $F : V \to \widetilde{V}$, die f erweitert.
Desweiteren gilt dann für $x \in W_\sigma$ mit $\rho_s(w) = x$ für ein $s \in \sigma,\ w \in W$:
$\forall g \in G$:

$$F \circ \rho_g(x) = F(\rho_{gs}(w)) = \widetilde{\rho}_{gs} f({\rho_{gs}}^{-1}\rho_{gs}(w)) = \widetilde{\rho}_g \widetilde{\rho}_s f({\rho_s}^{-1}(w)) = \widetilde{\rho}_g \circ F(x)$$

□

Satz

Sei (W, θ) eine lineare Darstellung von H. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutige lineare Darstellung (V, ρ) von G, welche von (W, θ) induziert ist.

Beweis

1) Existenz von ρ:
Da jede Darstellung die Summe irreduzibler Darstellungen ist, können wir mit Beispiel 3 o.B.d.A. annehmen, dass θ irreduzibel ist. Dann ist θ isomorph zu einer Unterdarstellung der regulären Darstellung von H. Dann existiert mit Beispiel 1 und Beispiel 4 eine von θ induzierte lineare Darstellung (V, ρ).

2) Eindeutigkeit von ρ:
Seien (V, ρ), $(\widetilde{V}, \widetilde{\rho})$ zwei von (W, θ) induzierte Darstellungen. Wenden wir nun das vorherige Lemma auf eine Injektion $f : W \to \widetilde{V}$ an, so gilt:
Es existiert eine lineare Abbildung $F : V \to \widetilde{V}$, s.d. $F|_W(x) = id_W$ und F erfüllt $F \circ \rho_g = \widetilde{\rho}_g \circ F,\ \forall g \in G$.
Für jedes $\widetilde{\rho}_g(w) \in \widetilde{\rho}_g W$ gilt dann: $\widetilde{\rho}_g(w) = \widetilde{\rho}_g(F(w)) = F(\rho_g(w))$, also $\widetilde{\rho}_g W \subset \operatorname{im} F\ \forall g \in G$ und somit $\operatorname{im} F = \widetilde{V}$.
Da $\dim V = \dim \widetilde{V} = (G : H) \cdot \dim W$, muss F ein Isomorphismus sein. □

Satz: Charakter der induzierten Darstellung

Sei $|G| = g$, H eine Untergruppe von G mit $|H| = h$, $R = \{r_1, ..., r_k\} \subseteq G$ ein Repräsentantensystem von G/H mit $r_1 = 1_G$. Sei $\rho : G \to GL(V)$ G-Darstellung, $\theta : H \to GL(W)$ H-Darstellung mit $W \subseteq V$ und θ induziert ρ.

Dann gilt für jedes $u \in G$:

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \chi_\theta(r^{-1}ur) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{g \in G \\ g^{-1}ug \in H}} \chi_\theta(g^{-1}ug)$$

Beweis

Der Raum V lasst sich zerlegen als $\bigoplus_{r \in R} \rho_r(W) = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$. Für alle $u \in G$ und alle $r \in R$ gilt: $ur = r'h$ für ein $r' \in R,\ h \in H$. Somit gilt $\rho_u(\rho_r(W)) = W_{r'}$. Das bedeutet, ρ_u permutiert die Unterräume $(W_\sigma)_{\sigma \in G/H}$.

Sei $\mathcal{B} = (x_{i,\sigma})_{i \in \{1, \dim W\}, \sigma \in G/H}$ eine Basis von V, so dass für jedes σ in G/H $(x_{i,\sigma})_{i \in \{1, \dim W\}}$ eine Basis von W_σ ist. Die Matrix $M = Mat_{\mathcal{B}}(\rho(u))$ ist eine Blockmatrix und die Spur von M ist die Summe der Spuren der Diagonalblöcke. Der Diagonalblock $M_\sigma = M_{[r]}$ bezüglich $W_\sigma = W_{[r]}$ ist nicht null, falls $ur = rh$ (d.h $r^{-1}ur \in H$) für ein h in H. In diesem Fall ist M_σ die Matrix von $(\rho_u)_{|W_\sigma}^{|W_\sigma} : W_\sigma \to W_\sigma$. Deswegen gilt:

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \mathrm{Tr}((\rho_u)_{|W_\sigma}^{|W_\sigma})$$

Sei $\phi = (\rho_r)_{|W_1}^{|W_{[r]}} : W_1 \to W_{[r]}$. Wegen der Spurformeln gilt: $\mathrm{Tr}((\rho_u)_{|W_\sigma}^{|W_\sigma}) = \mathrm{Tr}(\phi^{-1} \circ (\rho_u)_{|W_\sigma}^{|W_\sigma} \circ \phi)$.
Aber $\phi^{-1} \circ (\rho_u)_{|W_\sigma}^{|W_\sigma} \circ \phi = \theta_{r^{-1}ur}$. Daraus folgt:

$$\chi_\rho(u) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}ur \in H}} \chi_\theta(r^{-1}ur)$$

Es gilt für alle $G \ni g \in rH,\ r \in R' = \{r \in R | r' = r\}$:
$g^{-1}ug = (rt)^{-1}u(rt) = t^{-1}r^{-1}urt = t^{-1}r^{-1}rht = t^{-1}ht$ und $r^{-1}ur = r^{-1}rh = h$ für $t \in H$, also $\theta_h \circ \theta_{g^{-1}ug} = \theta_{r^{-1}ur} \circ \theta_h$. Somit sind $\theta_{g^{-1}ug}$ und $\theta_{r^{-1}ur}$ isomorph und besitzen den gleichen Charakter. Da $|rH| = h$ gilt, also h Elemente aus rH diese Eigenschaft erfüllen, ergibt sich die zweite Gleichheit. $\square$

Übung

$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\},\ A_3 = \{(1), (123), (132)\}$.
Sei $\theta : A_3 \to GL(\mathbb{C})$ mit:
$\theta(1) = 1,\ \theta((123)) = exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right),\ \theta((132)) = exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)$.
Konstruiere die von θ induzierte S_3-Darstellung $\rho : S_3 \to GL(\mathbb{C}^2)$.